

# 1. СИГНАЛЫ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ

## 1.2. Описание детерминированных сигналов разрывными функциями

При проведении анализа прохождения сигналов через радиотехнические цепи возникает задача представления сигнала в виде математического выражения. Сигнал  $s(t)$ , например, может быть описан с использованием тригонометрических  $s(t) = A \sin(t)$  или  $s(t) = A \cos(t)$ , экспоненциальных  $s(t) = A \exp(t)$  и логарифмических  $s(t) = A \ln(t)$  функций, где  $A$  — коэффициент пропорциональности,  $t$  — аргумент функции.

Импульсные сигналы могут быть описаны с использованием разрывных функций. Например, для трапецеидального импульса (рис.1.2) справедливо аналитическое определение

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_T \frac{t}{\tau_\phi} & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_\phi; \\ U_T & \text{при } \tau_\phi \leq t \leq \tau_n - \tau_c; \\ U_T \left(1 - \frac{t - \tau_n + \tau_c}{\tau_c}\right) & \text{при } \tau_n - \tau_c \leq t \leq \tau_n; \\ 0 & \text{при } t \geq \tau_n, \end{cases}$$

где  $U_T$  — амплитуда импульса;  $\tau_\phi$ ,  $\tau_c$  — длительности фронта (переднего) и среза (заднего фронта) импульса;  $\tau_n$  — длительность импульса.

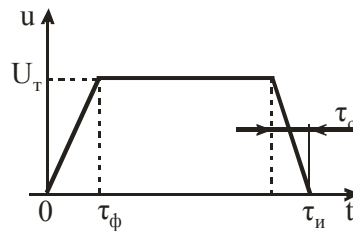


Рис. 1.2. Трапецеидальный импульс

Таким образом, разбивая сигнал на отдельные части, описываемые простейшими функциями (уравнения прямой, тригонометрические функции, экспоненциальные функции и т.д.) в разные моменты времени, можно получить формулу для описания сложного сигнала.

## 1.3. Динамическое описание сигналов

В устройствах систем связи отклик устройства на произвольное входное воздействие в достаточно широком временном диапазоне представляется суммой элементарных сигналов, возникающих в последовательные моменты времени. Устремляя к нулю длительность этих элементарных сигналов, в пределе получают точное представление сигнала. Этот метод описания

сигналов называется *динамическим*, что подчеркивает зависимость процесса от времени.

Широкое применение нашли два метода динамического описания сигналов. В одном из них в качестве элементарных сигналов используются ступенчатые функции, возникающие через равные промежутки времени  $\Delta t$  (рис.1.3,а). Высота каждой ступеньки  $\Delta s_j = s_j - s_{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  равна приращению сигнала на интервале времени  $\Delta t$ . Во втором методе в качестве элементарных сигналов используют прямоугольные импульсы одинаковой длительности  $\Delta t$ , но с высотой  $s_j$ , соответствующей аналоговому сигналу в момент времени  $t_j = j\Delta t$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  (рис.1.3,б).

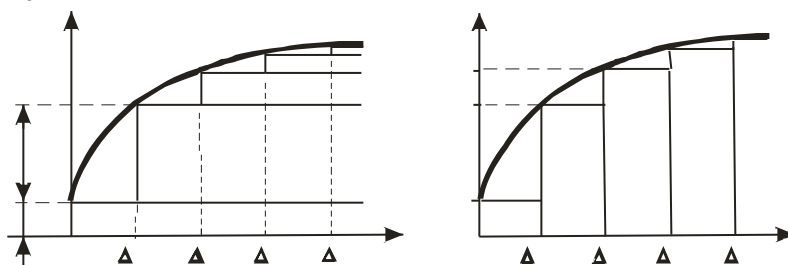


Рис. 1.3. Динамическое описание сигналов на базе ступенчатых (а) и импульсных (б) функций

В основе методов динамического представления сигналов лежат две функции. Это – функция включения и дельта-функция ( $\delta$ -функция).

**Функция включения (функция Хевисайда).** Пусть задан сигнал, математическая модель которого описывается выражением

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -\xi/2; \\ (1 + 2t/\xi)/2 & \text{при } -\xi/2 \leq t \leq \xi/2; \\ 1 & \text{при } t > \xi/2. \end{cases}$$

Эта функция отражает линейный закон перехода некоторого физического процесса из нулевого состояния в единичное состояние за время  $\xi$ . Математическая модель подобного перехода при стремящемся к нулю значении  $\xi$  получила название функции включения или функции Хевисайда

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $t_0$  — время, на которое функция включения смещена относительно начала координат.

К основным свойствам функции включения относят следующие.

1. Функция включения позволяет получить аналитическое представление о поведении сигналов  $s(t)$  до и после коммутации

$$s(t)\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ s(t) & \text{при } t \geq t_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

2. Разность двух функций включения  $\sigma_1(t) = \sigma(t - t_0)$  и  $\sigma_2(t) = \sigma(t - t_0 - \tau_{и})$  позволяет описать импульсный сигнал  $s(t)$  с амплитудой  $A$ , длительностью  $\tau_{и}$  и моментом появления  $t_0$

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t) = A[\sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_0 - \tau_{и})]. \quad (1.3)$$

**Дельта-функция (Функция Дирака).** Рассмотрим импульсный сигнал  $v(t) = \frac{1}{\xi} \left[ \sigma\left(t + \frac{\xi}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\xi}{2}\right) \right]$  прямоугольной формы с амплитудой  $1/\xi$  и длительностью  $\xi$ .

Заметим, что при любом параметре  $\xi$  площадь импульса с длительностью  $\xi$  и амплитудой  $1/\xi$  равна единице  $\Pi_v = \int_{-\infty}^{\infty} v dt = 1$ .

Функция  $v(t)$  при  $\xi$  стремящемся к нулю называется дельта-функцией, или функцией Дирака

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0; \\ \infty & \text{при } t = t_0. \end{cases}$$

Дельта-функция, будучи равной нулю всюду, кроме точки  $t = t_0$ , обладает единичным интегралом  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ .

Функция включения и дельта-функция связаны между собой соотношениями

$$\sigma(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt, \quad (1.4)$$

$$\delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} \sigma(t - t_0). \quad (1.5)$$

Фильтрующее свойство дельта-функции

$$s(t)\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0; \\ s(t_0) & \text{при } t = t_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

позволяет отследить значение произвольного сигнала  $s(t)$  в фиксированный момент времени  $t = t_0$ . Во всех остальных точках временной оси значение произведения дельта-функции на произвольную функцию  $s(t)$  равно нулю.

### 1.3.1. Динамическое представление сигнала функцией включения

Допустим, что имеется непрерывный произвольный сигнал  $s(t)$  (рис.1.4). Выделим на положительной оси времени дискретные моменты  $t_k = k\Delta t$ ,  $k \geq 1$ , кратные постоянному шагу дискретизации  $\Delta t$ . В момент времени  $t_k$  сигнал  $s(t)$

принимает значение  $s_k = s(t_k)$ . Пусть  $s_0 = s(t=0)$ . Тогда текущее значение сигнала при  $t_{k-1} < t \leq t_k$  приближенно равно сумме функций включения, амплитуды которых равны разности значений  $s_k$  и  $s_{k-1}$  функции  $s(t)$  в моменты времени  $t_k$  и  $t_{k-1}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} s(t) &\approx s_0 \sigma(t) + (s_1 - s_0) \sigma(t - \Delta t) + (s_2 - s_1) \sigma(t - 2\Delta t) + \dots = \\ &= s_0 \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) \sigma(t - k\Delta t). \end{aligned}$$

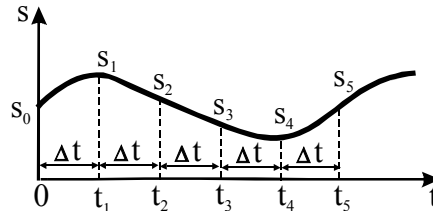


Рис. 1.4. Динамическое представление сигнала функцией включения

Если временной интервал  $\Delta t$  устремить к нулю, то дискретную переменную  $k\Delta t$  можно заменить непрерывной переменной  $\tau$ . Малые приращения  $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$  функцией включения превращаются в дифференциалы  $ds = (ds/d\tau)d\tau$ . Это позволяет получить формулу динамического представления произвольного сигнала посредством функций включения

$$s(t) = s_0 \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau. \quad (1.7)$$

### 1.3.2. Динамическое представление сигнала дельта-функцией

Исходный сигнал  $s(t)$  в моменты времени  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  может быть представлен в виде суммы элементарных импульсов  $\eta_k(t) = s_k [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta t)]$  с амплитудой  $s_k = s(t_k)$ :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(t). \quad (1.8)$$

Подставляя в (1.8) значение элементарного импульса, производя деление и умножение выражения для  $s(t)$  на величину шага взятия отсчетов  $\Delta t$ , получим

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta t)}{\Delta t} \Delta t. \quad (1.9)$$

В выражении (1.9), переходя к пределу при шаге  $\Delta t$ , стремящемся к 0, можно заменить суммирование интегрированием по переменной  $\tau$ .

В результате подобных преобразований получим формулу динамического представления сигнала с использованием дельта-функции

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.10)$$

## 1.4. Энергетические характеристики вещественного сигнала

К числу основных энергетических характеристик вещественного сигнала  $s(t)$  можно отнести следующие.

1. Мгновенная мощность  $p(t)$ , которая определяется как квадрат мгновенного значения сигнала

$$p(t) = s^2(t), \quad (1.11)$$

где  $s(t)$  – напряжение (ток), прикладываемое к сопротивлению в 1 Ом.

2. Энергия  $W$  на интервале времени  $(t_1, t_2)$  определяется интегралом от мгновенной мощности

$$W = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt. \quad (1.12)$$

3. Средняя мощность  $P_{cp}$  определяется значением энергии сигнала, отнесенной к протяженности рассматриваемого интервала времени

$$P_{cp} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt, \quad (1.13)$$

где  $T = t_2 - t_1$  – интервал времени, на котором задан сигнал.

Если сигнал  $s(t)$  задан на бесконечном интервале времени, то средняя мощность определяется в следующем виде:

$$P_{cp} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt.$$

Энергия и мощность, например, двух сигналов на произвольном интервале времени могут быть как равными сумме мощностей (энергий) этих сигналов, так и не равными. Рассмотрим два сигнала  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , которые заданы на интервале времени  $(t_1, t_2)$ . Энергия и мощность от суммы этих сигналов имеют вид:

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} s_1^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} s_2^2(t) dt + \\ &+ 2 \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) s_2(t) dt = W_1 + W_2 + 2W_{12}; \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s_1^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s_2^2(t) dt + \\ &+ \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) s_2(t) dt = P_{cp1} + P_{cp2} + 2P_{cp12}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  — энергии первого и второго сигналов;  $P_1$  и  $P_2$  — мощности первого и второго сигналов;  $W_{12}$  — взаимная энергия первого и второго сигналов;  $P_{12}$  — взаимная мощность первого и второго сигналов.

Если взаимная энергия и взаимная мощность двух сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  равны нулю, то сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  на интервале времени  $T = t_2 - t_1$  ортогональны. В этом случае выражения (1.14) и (1.15) принимают вид:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} s_1^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} s_2^2(t) dt = W_1 + W_2; \quad (1.16)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s_1^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s_2^2(t) dt = P_1 + P_2. \quad (1.17)$$

## 1.5. Энергетические характеристики комплексного сигнала

Относительно комплексных сигналов также оперируют понятиями мгновенной мощности, энергии и средней мощности, которые должны быть действительными величинами, несмотря на то, что сигналы комплексные. Рассмотрим это.

1. Мгновенная мощность определяется произведением комплексного сигнала  $\dot{s}(t)$  на комплексно-сопряженный сигнал  $\dot{s}^*(t)$

$$p(t) = \dot{s}\dot{s}^* = [s'(t) + js''(t)] \cdot [s'(t) - js''(t)] = [s'(t)]^2 + [s''(t)]^2, \quad (1.18)$$

где  $s'(t)$  и  $s''(t)$  — действительная и мнимая части комплексного сигнала соответственно.

2. Энергия комплексного сигнала  $\dot{s}(t)$  на интервале времени  $T = t_2 - t_1$  равна интегралу от мгновенной мощности (1.18):

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}(t)\dot{s}^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ [s'(t)]^2 + [s''(t)]^2 \right\} dt. \quad (1.19)$$

3. Средняя мощность комплексного сигнала  $\dot{s}(t)$  на интервале времени  $T = t_2 - t_1$  определяется следующим выражением:

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}(t)\dot{s}^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ [s'(t)]^2 + [s''(t)]^2 \right\} dt. \quad (1.20)$$

Энергию и мощность суммы комплексных сигналов  $\dot{s}_1(t)$  и  $\dot{s}_2(t)$  на интервале времени  $T = t_2 - t_1$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} W = & \int_{t_1}^{t_2} [\dot{s}_1(t) + \dot{s}_2(t)] [\dot{s}_1^*(t) + \dot{s}_2^*(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t)\dot{s}_1^*(t) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_2(t)\dot{s}_2^*(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1^*(t)\dot{s}_2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t)\dot{s}_2^*(t) dt, \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} [\dot{s}_1(t) + \dot{s}_2(t)] [\dot{s}_1^*(t) - \dot{s}_2^*(t)] dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t) \dot{s}_1^*(t) dt + \\ + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_2(t) \dot{s}_2^*(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1^*(t) \dot{s}_2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t) \dot{s}_2^*(t) dt.$$

Два комплексных сигнала  $\dot{s}_1(t)$  и  $\dot{s}_2(t)$ , рассматриваемые на интервале времени  $T = t_2 - t_1$ , являются ортогональными, если их взаимная мощность  $P_{12}$  или взаимная энергия  $W_{12}$  равны нулю. Сумма третьих и четвертых интегралов в правых частях полученных выражений представляет собой удвоенную взаимную энергию и удвоенную взаимную мощность:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1^*(t) \dot{s}_2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t) \dot{s}_2^*(t) dt ; \\ P_{12} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1^*(t) \dot{s}_2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t) \dot{s}_2^*(t) dt ,$$

которые равны нулю, если выполняется условие

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1^*(t) \dot{s}_2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t) \dot{s}_2^*(t) dt. \quad (1.21)$$

## 1.6. Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье

Пусть на вход устройства воздействуют два сигнала  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ . Энергия суммы двух сигналов определяется выражением (1.14). Энергия суммарного сигнала, помимо энергии каждого из сигналов, включает в себя и *взаимную энергию сигналов*

$$W_{s_1 s_2} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt .$$

Сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  называются *ортогональными*, если их взаимная энергия равна нулю, т.е.

$$W_{s_1 s_2} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = 0. \quad (1.22)$$

Пусть на временном интервале  $[t_1, t_2]$  задано множество сигналов  $\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$ , попарно ортогональных друг другу и обладающих нулевой взаимной энергией. Тогда

$$W_{s_i s_j} = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) s_j(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (1.23)$$

Условие (1.23) говорит о том, что в пространстве сигналов определен **ортонормированный базис**, образованный функциями  $s_i$ . Используя этот базис, произвольный сигнал  $s(t)$  может быть представлен рядом

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s_i(t). \quad (1.24)$$

Ряд (1.24) называется **обобщенным рядом Фурье** сигнала  $s(t)$  в выбранном базисе ортонормированных функций  $s_i$ .

Постоянный коэффициент обобщенного ряда Фурье будет равен

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) s_k(t) dt = (\bar{s}, \bar{u}_k) \quad \text{при } k \geq 0. \quad (1.25)$$

Используя обобщенный ряд Фурье (1.24) с определенными по формуле (1.25) коэффициентами  $c_k$  и множество ортонормированных функций из выбранного базиса, можно провести аппроксимацию любого сложного сигнала. Под аппроксимацией в данном случае понимают разложение сложного сигнала на более простые функции (сигналы) из базиса ортонормированных функций, каждая из которых имеет амплитуду, определенную формулой (1.25).

## 1.7. Примеры ортонормированных базисов

Из множества возможных ортонормированных базисов рассмотрим базисы, наиболее применимые в теории связи.

**Ортонормированная система гармонических функций.** Пусть период изменения сложного сигнала равен  $T$ . Для описания сигнала  $u(t)$  используется временной интервал  $[0, T]$ , постоянное число  $u_0 = 1/\sqrt{T}$  и множество тригонометрических функций с частотами  $2\pi m/T$ , кратными частоте изменения исходного сигнала  $\omega_1 = 2\pi/T$ . Эти функции и образуют ортонормированный базис:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right); \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right); \\ u_{2m-1} &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right); \quad u_{2m} = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

**Ортонормированный базис экспоненциальных функций:**

$$\dots, e^{-jk\omega_1 t}, \dots, e^{-j2\omega_1 t}, e^{-j\omega_1 t}, 1, e^{j\omega_1 t}, e^{j2\omega_1 t}, \dots, e^{jk\omega_1 t}, \dots, \quad (1.27)$$

где  $\omega_1 = 2\pi/T$  — частота изменения исходного сигнала.



## Контрольное задание № 1

Контрольное задание предусматривает получение студентом аналитического описания сигнала, предоставленного ему в графическом виде, и вычисление средней мощности этого сигнала. Варианты сигналов представлены в табл. 1.1. В табл. 1.2 – 1.4 приведены варианты длительностей, скважности и амплитуд импульсов.

### *Пример выполнения контрольного задания № 1.*

Допустим, что необходимо получить аналитическое описание сигнала № 3 (табл. 1.1). Длительность импульса равна  $\tau_{и} = 1,6 \cdot 10^{-4}$  с (табл. 1.2), скважность следования импульсов равна  $q = 2$  (табл. 1.3), а амплитуда импульса равна  $U = 4$  В (табл. 1.4).

Сигнал можно описать разрывными функциями, рассматривая три участка:  $-\frac{\tau_{и}}{2} \leq t < -\frac{\tau_{и}}{4}$ ;  $-\frac{\tau_{и}}{4} \leq t < \frac{\tau_{и}}{4}$ ;  $\frac{\tau_{и}}{4} \leq t < \frac{\tau_{и}}{2}$ .

На первом участке значение сигнала линейно изменяется от нуля при  $t = -\tau_{и}/2$  до 4 В при  $t = -\tau_{и}/4$ , поэтому для его описания используем уравнение прямой линии

$$y = kx + b,$$

где  $y$  – интенсивность изменения сигнала;  $x$  – время;  $k$  и  $b$  – коэффициенты.

Для крайних точек первого участка изменения сигнала можно записать:

$$0 = -k \frac{\tau_{и}}{2} + b; \quad U = -k \frac{\tau_{и}}{4} + b.$$

Решая эту систему уравнений, вычислим коэффициенты:

$$k = \frac{4U}{\tau_{и}} = 1 \cdot 10^5 \text{ В/с}, \quad b = 2U = 8 \text{ В}.$$

Тогда аналитическое выражение, описывающее сигнал на первом участке, принимает вид

$$u_1(t) = \frac{4U}{\tau_{и}} t + 2U = 1 \cdot 10^5 t + 8, \text{ В}.$$

Относительно крайних точек сигнала третьего участка можно записать:

$$U = k \frac{\tau_{и}}{4} + b; \quad 0 = k \frac{\tau_{и}}{2} + b.$$

Решая эту систему уравнений, вычислим коэффициенты:

$$k = -\frac{4U}{\tau_{и}} = -1 \cdot 10^5 \text{ В/с}, \quad b = 2U = 8 \text{ В}.$$

Тогда аналитическое выражение, описывающее сигнал на третьем участке, принимает вид

$$u_3(t) = -\frac{4U}{\tau_n}t + 2U = -1 \cdot 10^5 t + 8, \text{ В.}$$

Таким образом, описание заданного сигнала будет иметь следующий вид:

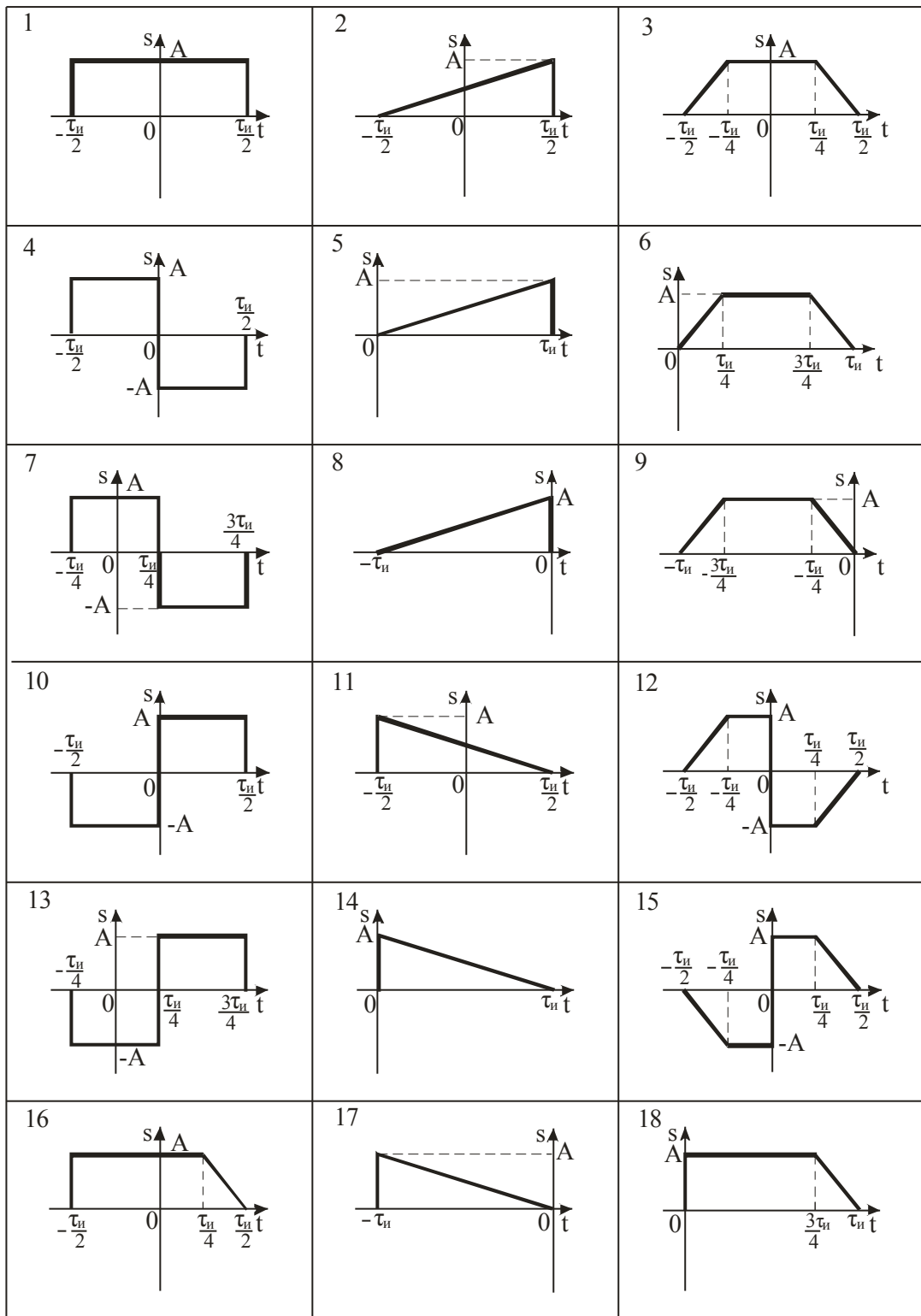
$$u(t) = \begin{cases} \frac{4U}{\tau_n}t + 2U = 1 \cdot 10^5 t + 8, \text{ В} & \text{при } -\frac{\tau_n}{2} \leq t < -\frac{\tau_n}{4}; \\ U = 4, \text{ В} & \text{при } -\frac{\tau_n}{4} \leq t < \frac{\tau_n}{4}; \\ -\frac{4U}{\tau_n}t + 2U = -1 \cdot 10^5 t + 8, \text{ В} & \text{при } \frac{\tau_n}{4} \leq t < \frac{\tau_n}{2}. \end{cases}$$

Используя выражение (1.13), вычислим среднюю мощность сигнала:

$$\begin{aligned} P_{\text{cp}} &= \frac{1}{T} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} u^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau_n/2}^{-\tau_n/4} \left( \frac{4U}{\tau_n}t + 2U \right)^2 dt + \frac{1}{T} \int_{-\tau_n/4}^{\tau_n/4} U^2 dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{\tau_n/4}^{\tau_n/2} \left( -\frac{4U}{\tau_n}t + 2U \right)^2 dt = \frac{2U^2\tau_n}{3T} = \frac{2U^2}{3q} = 5,333, \text{ Вт.} \end{aligned}$$

*\* Студенты при проведении расчетов должны приводить подробные вычисления с соответствующими пояснениями и выводами.*

Таблица 1.1  
Графическое начертание импульсных сигналов



Окончание табл. 1.1

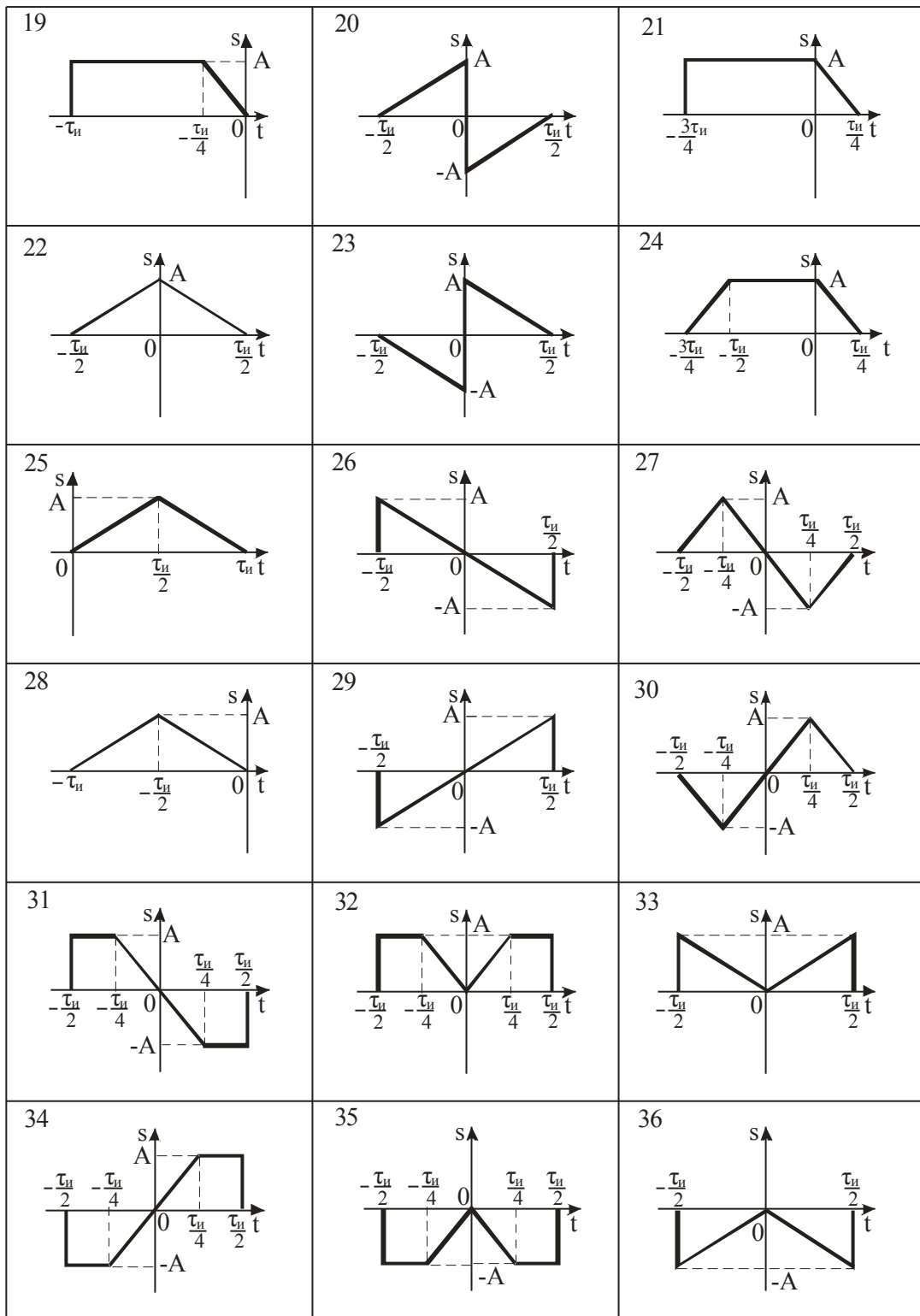


Таблица 1.2

## Длительности импульсов

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Длительность импульса, $\tau_H \cdot 10^{-4}$ , с	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8

Таблица 1.3

Скважность следования импульсов

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Скважность, $q = T/\tau_{и}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5

Скважность равная единице предусмотрена только для сигналов с номерами: 4, 7, 10, 12, 13, 15, 20, 23, 26, 27, 29, 30, 31 и 34.

Таблица 1.4

Амплитуды импульсов

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Амплитуда импульса, В	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6

## 2. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

### 2.1. Описание сложных периодических сигналов рядом Фурье

Сигналы делят на периодические и непериодические. *Периодический сигнал* представляет детерминированный сигнал, мгновенные значения которого повторяются через равные промежутки времени. Параметр  $T$ , равный наименьшему интервалу времени, через который повторяются мгновенные значения периодического сигнала, называется *периодом*. Таким образом, периодические сигналы удовлетворяют условию

$$s(t) = s(t + nT), \quad (2.1)$$

где  $n$  — любое целое число.

Непериодические сигналы условию (2.1) не удовлетворяют.

К основным энергетическим характеристикам сигналов относят его мгновенную (1.11) и среднюю (1.13) мощность, а также энергию (1.12).

При анализе прохождения сигналов через радиотехнические цепи важным является представление (аппроксимация) реальных детерминированных сигналов. В качестве критерия качества аппроксимации используют разность мощностей или энергий реального сигнала и предлагаемой модели сигнала. Эта разность должна быть минимальной.

В большинстве случаев аппроксимировать сложный сигнал одной функцией с достаточной степенью точности невозможно. Однако при аппроксимации сигналов можно использовать множество аппроксимирующих функций  $\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_k(t), \dots$ , где  $k$  — номер аппроксимирующей

функции. В этом случае каждая из этих функций будет вносить свой вклад в точность аппроксимации исходного сигнала:

$$s(t) = c_0\eta_0(t) + c_1\eta_1(t) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\eta_k(t). \quad (2.3)$$

Таким образом, выбрав аппроксимирующие функции  $\eta_k(t)$  и определив коэффициенты аппроксимации  $c_k$ , исходный сигнал  $s(t)$  можно представить суммой произведений функций  $\eta_k(t)$  и коэффициентов  $c_k$ .

Для упрощения вычислений в качестве множества аппроксимирующих функций  $\{\eta_k, k \geq 0\}$  используют ортонормированные функции, которые попарно отвечают условию ортогональности

$$\begin{cases} \int_a^b \eta_n(t)\eta_m(t)dt = 0 & \text{при } n \neq m; \\ \int_a^b \eta_n(t)\eta_m(t)dt \neq 0 & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что для базиса ортогональных функций взаимная энергия двух функций не равна нулю только при равенстве между собой индексов этих функций. Таким образом, нулю не равна энергия от функции, умноженной само на себя, если при этом она сама не равна нулю.

Если для функции  $\eta_n(t)$  выполняется условие

$$\int_a^b \eta_n^2(t)dt = 1, \quad (2.5)$$

то подобная функция называется **нормированной**. Функции, отвечающие условиям (2.4) и (2.5), называются **ортонормированными**. Базис (множество) подобных функций используется в качестве системы действительных функций при описании периодического сигнала обобщенным рядом Фурье (2.3).

Аппроксимирующие функции из системы базисных функций могут принимать комплексные значения  $\{\tilde{\eta}_k(t), k \geq 0\}$ . Пусть функция  $\tilde{\eta}^*(t)$  представляет комплексно-сопряженную к  $\tilde{\eta}(t)$ . В этом случае условие ортогональности принимает вид

$$\int_a^b \tilde{\eta}_n(t)\tilde{\eta}_m^*(t)dt = 0 \quad \text{при } n \neq m.$$

А обобщенный ряд Фурье запишется:

$$\tilde{s}(t) = \tilde{c}_0\tilde{\eta}_0(t) + \tilde{c}_1\tilde{\eta}_1(t) + \tilde{c}_2\tilde{\eta}_2(t) + \dots + \tilde{c}_n\tilde{\eta}_n(t) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k\tilde{\eta}_k(t). \quad (2.6)$$

При стремлении достичь точного представления сигнала наиболее часто используют ортонормированную систему гармонических функций  $\sin(n\omega t)$  и  $\cos(n\omega t)$ . Это определяется следующими соображениями:

— гармоническое колебание является простейшей функцией;

— гармоническое колебание не поддается дальнейшему разложению на спектральные составляющие;

— гармонические колебания представляют единственные функции времени, которые не изменяют своей формы при прохождении через линейные радиотехнические цепи (элементы этой цепи имеют постоянные параметры), изменяется лишь амплитуда и фаза колебания;

— использование гармонических колебаний в качестве аппроксимирующих сигналов позволяет применять символические методы (например, метод комплексных амплитуд) для анализа линейных цепей в установившемся режиме.

Для записи обобщенного ряда Фурье (2.3) в тригонометрической форме возможно использовать следующую систему ортогональных функций:

$$\dots \exp(-jk\omega_1 t), \dots, \exp(-j2\omega_1 t), \exp(-j\omega_1 t), 1, \exp(j\omega_1 t), \exp(j2\omega_1 t), \dots, \exp(jk\omega_1 t), \dots \quad (2.7)$$

Ортогональность этих функций (2.7) выполняется на временном интервале, равном периоду изменения  $T = 2\pi / \omega_1$  исходного сигнала  $s(t)$ .

Тогда обобщенный ряд Фурье (2.4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) = & \dots \tilde{c}_{-k} \exp(-jk\omega_1 t) + \dots + \tilde{c}_{-2} \exp(-j2\omega_1 t) + \tilde{c}_{-1} \exp(-j\omega_1 t) + \tilde{c}_0 + \\ & + \tilde{c}_1 \exp(j\omega_1 t) + \tilde{c}_2 \exp(j2\omega_1 t) + \dots + \tilde{c}_k \exp(jk\omega_1 t) + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k \exp(jk\omega_1 t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где коэффициенты  $\tilde{c}_k$  равны

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt.$$

Используя преобразование Эйлера  $\exp(-jk\omega_1 t) = \cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t$ , коэффициенты  $c_k$  можно представить к виду

$$\tilde{c}_k = c_{kc} - j c_{ks}, \quad (2.9)$$

где  $c_{kc} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt$ ;  $c_{ks} = -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt$  — косинусоидальная и синусоидальная составляющие коэффициентов  $c_k$ .

Комплексное число, описывающее коэффициент  $\tilde{c}_k$  в алгебраической форме (2.9), можно представить в показательной форме

$$\tilde{c}_k = |\tilde{c}_k| e^{j\Theta_k},$$

где  $|\tilde{c}_k| = \sqrt{(c_{kc})^2 + (c_{ks})^2}$  — модуль, а  $\Theta_k = -\arctg(c_{ks} / c_{kc})$  — аргумент коэффициента  $\tilde{c}_k$ .

С учетом значений коэффициентов  $\tilde{c}_k$  можно записать комплексную форму ряда Фурье (2.8):

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_k| \exp[j(k\omega_1 t - \Theta_k)]. \quad (2.10)$$

Так как при  $k = 0$  в базисе ортогональных функций (2.7) присутствует только одна функция, равная единице, то ряд Фурье (2.10) можно представить в более удобной форме:

$$s(t) = \tilde{c}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{c}_k| \cos(k\omega_1 t - \Theta_k). \quad (2.11)$$

Учитывая значения коэффициентов  $c_{kc}$  и  $c_{ks}$  (2.9), тригонометрический ряд Фурье окончательно принимает следующий вид:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) - jb_k \sin(k\omega_1 t)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \Theta_k), \quad (2.12)$$

$$\text{где } A_k = 2|\tilde{c}_k| = \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}; \quad a_k = 2c_{kc} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt;$$

$$b_k = 2c_{ks} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt; \quad \Theta_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}.$$

Рассматривая тригонометрический ряд Фурье (2.12) и коэффициенты, входящие в него, можно обнаружить следующие свойства:

— если сигнал описывается четной функцией (сигнал симметричен относительно начала координат  $s(-t) = s(t)$  и достигает максимума при  $t = 0$ ), то в ряде Фурье коэффициенты  $b_k$  будут равны нулю;

— если сигнал описывается нечетной функцией (при  $t = 0$  сигнал достигает минимального значения), то в ряде Фурье коэффициенты  $a_k$  будут равны нулю;

— структура частотного спектра исходного сигнала полностью определяется спектром амплитуд (модули коэффициентов  $A_k$ ) и спектром фаз (аргументы  $\Theta_k$  комплексных коэффициентов);

— спектр амплитуд периодического сигнала является линейчатым (дискретным), поскольку он состоит из отдельных спектральных составляющих, каждая из которых имеет свою частоту  $0, \omega_1, \omega_2 = 2\omega_1, \omega_3 = 3\omega_1, \dots$  и свою амплитуду. На рис.2.1 представлен спектр амплитуд для коэффициентов  $|\tilde{c}_k|$ , а на рис.2.2 – для коэффициентов  $A_k = 2|\tilde{c}_k|$ , соответствующих одному и тому же сигналу;

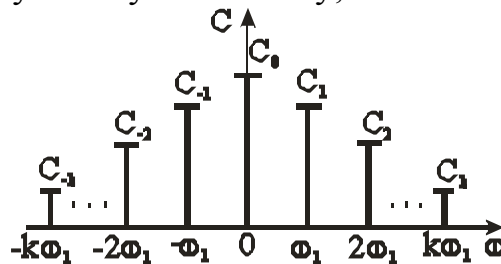


Рис. 2.1. Коэффициенты комплексного ряда Фурье



– ширина спектра периодического сигнала определяется частотой спектральной составляющей ( $\omega_q = q\omega_1$ ), имеющей амплитуду на оговоренном (заданном) уровне, например, амплитуда составляет 0,707 от максимальной амплитуды какой-либо спектральной составляющей.

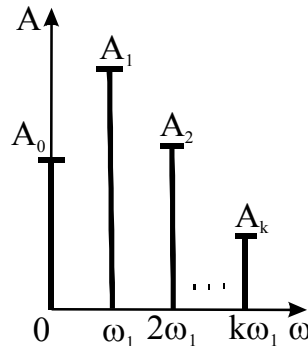


Рис. 2.2. Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье

## 2.2. Мощность спектра периодического сигнала

Допустим, что сигнал  $s(t)$ , являющийся током или напряжением, описывается сложной периодической функцией. Энергия этого сигнала (1.12) представляет собой бесконечную величину, поскольку  $t_1 = -\infty$ , а  $t_2 = \infty$ . Для подобных сигналов большой интерес представляет оценка средней мощности (1.13).

Периодический сигнал  $s(t)$  может быть описан обобщенным рядом Фурье (2.10), в котором каждая спектральная составляющая имеет свою амплитуду  $|\tilde{c}_k|$ , а базисные функции  $\eta_k$  принадлежат ортонормированному базису. Тогда мощность сигнала может быть рассчитана по формуле

$$P_{cp} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_k|^2 \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(jk\omega_1 t) \exp(-jk\omega_1 t) dt \right].$$

Поскольку интеграл в квадратных скобках этого выражения равен периоду  $T$ , то значение средней мощности определяется выражением

$$P_{cp} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_k|^2. \quad (2.13)$$

Таким образом, средняя мощность периодического сигнала определяется суммой квадратов спектральных составляющих, на которые разлагается этот сигнал.

Используя в качестве ортогонального базиса гармонические функции, средняя мощность сложного сигнала может быть представлена в виде

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \Theta_k) \right]^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 + \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2k\omega_1 t + 2\Theta_k) dt.$$

Интеграл во втором слагаемом равен нулю, поскольку интеграл от гармонической функции за период ее изменения равен нулю. Тогда формулу можно преобразовать к виду

$$P_{cp} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2. \quad (2.14)$$

Таким образом, и в этом случае получаем, что средняя мощность периодического сигнала может быть описана суммой квадратов амплитуд спектральных составляющих, на которые разлагается сложный сигнал.

### 2.3. Спектральный анализ непериодических сигналов

Известно, что сигналы могут быть как периодическими, так и непериодическими. Периодические сигналы можно аппроксимировать рядом Фурье (2.11) и (2.12). Учитывая, что множество сигналов в радиотехнических устройствах являются непериодическими функциями, распространим выражения, относящиеся к ряду Фурье на непериодические сигналы.

Допустим, что имеется непериодический сигнал  $s(t)$ , представленный в виде одиночного импульса, отличный от нуля на временном интервале  $[t_1, t_2]$ .

Определим для этого импульса интервал времени  $(0, T)$ , на котором он существует. Тогда его можно представить в виде периодического сигнала с периодом повторения  $T$ . Периодический сигнал описывается рядом Фурье, например, в комплексной форме:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_k| \exp(jk\omega_1 t). \quad (2.15)$$

В выражении (2.15)  $k$ -й коэффициент ряда Фурье может быть рассчитан по формуле

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \tilde{s}(t) \exp(jk\omega_1 t) dt. \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.15), находим аппроксимацию непериодического сигнала рядом Фурье:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left( \int_{t_1}^{t_2} \tilde{s}(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt \right) \exp(jk\omega_1 t). \quad (2.17)$$

Для периодической функции разложение сигнала в ряд Фурье приводит к получению дискретного спектра. При этом каждому коэффициенту  $c_k$  соответствует круговая частота  $k\omega_1$ . Таким образом, составляющие спектра сигнала отстоят друг от друга на величину  $\omega_1$ .

Если для периодического сигнала период  $T$  устремить к бесконечности, то можно перейти к одиночному импульсу, т. е. непериодическому сигналу. В этом случае  $\omega_1 = 2\pi/T$  будет стремиться к бесконечно малой величине  $d\omega$ . Частоты спектральных составляющих  $k\omega_1$  будут представлять собой текущие частоты  $\omega$ , поскольку

$$\lim_{T \rightarrow \infty} k\omega_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} k \frac{2\pi}{T} = kd\omega = \omega.$$

Заменяя в выражении (2.17) операцию суммирования относительно бесконечно малых величин операцией интегрирования, имеем

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_1}{2\pi} \left[ \int_{t_1}^{t_2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt \right] \exp(jk\omega_1 t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) \left[ \int_{t_1}^{t_2} s(t) \exp(-j\omega t) dt \right] d\omega. \quad (2.18)$$

В выражении интеграл в круглых скобках

$$S(j\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) \exp(-j\omega t) dt$$

является функцией частоты  $\omega$  и называется спектральной плотностью сигнала  $s(t)$ . В случае, когда интервал интегрирования неопределен, спектральная плотность сигнала рассматривается в диапазоне частот от  $-\infty$  до  $+\infty$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в выражение (2.18), получим

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \exp(j\omega t) dt. \quad (2.20)$$

Выражение (2.19) называется **прямым**, а (2.20) – **обратным преобразованиями Фурье**. Первое из этих выражений позволяет провести анализ непериодических сигналов в частотной области, а второе – во временной области, т. е. восстановить сигнал по его спектральной плотности.

Экспоненциальную функцию в выражении (2.19) можно представить в виде суммы функций  $\cos x$  и  $\sin x$ , тогда выражение для спектральной плотности будет иметь вид

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \quad (2.21)$$

где  $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt$  и  $B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt$  — действительная и мнимая

части спектральной плотности;  $S(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$  и  $\psi(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$  —

модуль и аргумент спектральной плотности непериодического сигнала.

## 2.4. Свойства преобразования Фурье

Для решения практических задач установим связь между спектральной плотностью сигналов (2.19) и временным описанием сигналов (2.20). Для этого

рассмотрим ряд положений, характеризующих преобразования сигналов и их спектров.

### 2.4.1. Сдвиг сигналов во времени

Допустим, имеется сигнал  $s_1(t)$ , который существует в пределах временного интервала  $[t_1, t_2]$ . Этому сигналу соответствует спектральная плотность (2.19).

Сдвинем сигнал  $s_1(t)$  во времени на величину  $t_0$ , не изменяя его спектральной плотности. В результате этого получим сигнал  $s_2(t) = s_1(t - t_0)$ , спектральная плотность которого принимает вид

$$S_2(j\omega) = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_2(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_1(t - t_0) \exp(-j\omega t) dt.$$

В этом выражении заменим переменную интегрирования  $t$  на  $\tau = t - t_0$ . Тогда

$$S_2(j\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s_1(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_1(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau = S(j\omega) \exp(j\omega t_0).$$

В отношении спектральной плотности  $S_2(j\omega)$  сигнала  $s_2(t)$ , полученного путем сдвига по оси времени сигнала  $s_1(t)$ , можно отметить следующее:

- спектр амплитуд  $S(\omega)$  спектральной плотности остается неизменным;
- фазовая характеристика спектральной плотности изменяется на величину  $\pm \omega t_0$ ;
- при добавлении к фазе каждой спектральной составляющей  $S_1(j\omega)$  исходного сигнала  $s_1(t)$  фазового сдвига  $\pm \omega t_0$  можно говорить, что сигнал сдвигается во времени на  $t_0$ .

### 2.4.2. Изменение масштаба времени

Допустим, имеется произвольный импульсный сигнал  $s_1(t)$ , длительность которого равна  $\tau_n$  (сплошная линия на рис.2.3). Изменив масштаб времени этого сигнала на  $n$ , получим новый сигнал  $s_2(t) = s_1(nt)$ . Этому сигналу при  $n > 1$  на рис.2.3 соответствует пунктирная, а при  $n < 1$  – штрих-пунктирная линии.

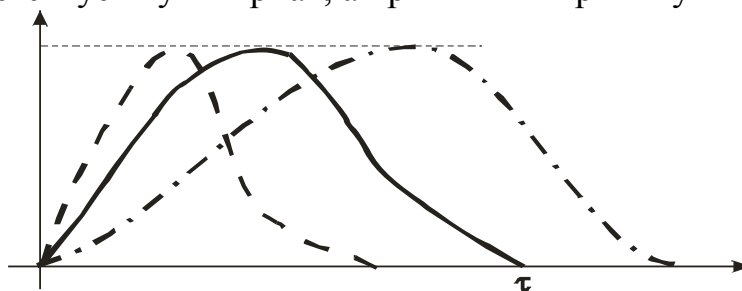


Рис. 2.3. Исходный импульсный сигнал (1), его сжатая (2) и растянутая (3) во времени копии

Исходному сигналу  $s_1(t)$  соответствует спектральная плотность  $S_1(j\omega)$ . Спектральная плотность сигнала, полученного при масштабировании времени, приобретает вид

$$S_2(j\omega) = \int_0^{\tau_n/n} s_2(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\tau_n/n} s_1(nt) \exp(-j\omega t) dt.$$

При изменении переменной интегрирования  $t$  на  $\tau=nt$  получим

$$S_2(j\omega) = \frac{1}{n} \int_0^{\tau_n} s_1(\tau) \exp\left(-j\frac{\omega}{n}\tau\right) d\tau = \frac{1}{n} S_1\left(j\frac{\omega}{n}\right).$$

Проведенные вычисления показывают, что при сжатии на временной оси сигнала в  $n$  раз:

- его спектр на оси частот расширяется (уменьшается) также в  $n$  раз;
- амплитуды спектральных составляющих модуля спектральной плотности уменьшаются (увеличиваются) в  $n$  раз.

## 2.5. Спектральная плотность мощности детерминированного сигнала

Под энергией сигнала  $u(t)$  понимают величину

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt.$$

Запишем выражение для энергии сигнала, используя интеграл обратного преобразования Фурье (2.20):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega. \quad (2.22)$$

Для сигнала, существующего на ограниченном интервале времени  $[-T/2, T/2]$ , равенство Парсеваля можно записать в виде

$$\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 dt.$$

Разделим левую и правую части равенства на время, равное  $T$ , и устремим его к бесконечности. В этом случае будем иметь

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{T} dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) dt,$$

где

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{T} \quad (2.23)$$

называются *спектральной плотностью мощности сигнала*.

## 2.6. Автокорреляционная функция

Под автокорреляционной функцией сигнала  $u(t)$  понимают величину

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u^*(t + \tau) dt, \quad (2.24)$$

где  $\tau$  – некоторый постоянный сдвиг функции  $u(t)$ ;  $u^*(t - \tau)$  – функция  $u(t)$ , сдвинутая по оси времени на  $\tau$ .

Автокорреляционная функция имеет следующие свойства.

1. Значение автокорреляционной функции при  $\tau = 0$  равно энергии сигнала  $E$ :

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = E.$$

2. Автокорреляционная функция при  $\tau \neq 0$  меньше энергии сигнала:

$$R(\tau) < R(0) = E.$$

3. Автокорреляционная функция является четной функцией, т.е.

$$R(\tau) = R(-\tau).$$

Можно показать функциональную связь между автокорреляционной функцией  $R(\tau)$  и спектральной плотностью энергии сигнала  $|S(j\omega)|^2$ . Для этого сигнал, сдвинутый во времени на  $\tau$  сигнал, выразим с помощью интеграла обратного преобразования Фурье (2.20). Подставим его в выражение (2.24). В результате получим

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.25)$$

Из этого выражения можно получить и обратное утверждение

$$|S(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.26)$$

Для сигналов с неограниченной энергией автокорреляционная функция имеет вид

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{R(\tau)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cdot u^*(t + \tau) dt.$$

Учитывая это, можно получить следующее выражение:

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim \frac{|S(j\omega)|^2}{T} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.27)$$

Отсюда видно, что **спектральная плотность мощности** может быть найдена путем преобразования автокорреляционной функции по формуле

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.28)$$

## Контрольное задание № 2

Выполняя контрольное задание, студенту необходимо разложить сложный периодический сигнал на спектральные составляющие, оценить мощность сигнала в соответствии с его спектральным составом и провести сравнительный анализ формы сигнала, полученного при различном числе спектральных составляющих, и исходного сигнала. Выполняя данное контрольное задание, студентам необходимо выполнить следующее.

1. Получить аналитическое описание периодического сигнала (вариант формы импульса и его параметры определяет преподаватель в соответствии с табл. 1.1 – 1.4).

2. Разложить периодический сигнал на спектральные составляющие. Вычисления произвести для следующих случаев:

– рассматривать длительность импульсов и скважность следования импульсов постоянными, соответствующими исходному заданию;

– уменьшать полную длительность импульса  $\tau_{\text{ин}}$  в соответствии со следующим выражением:  $\tau_{\text{ин}} = \tau_{\text{и}} \cdot n$ , где  $n = 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1$ , сохраняя неизменным период следования импульсов;

– построить диаграммы спектров амплитуд и спектров фаз для всех рассмотренных случаев, провести их сравнительный анализ;

– определить ширину спектра сигнала в пределах первого лепестка при различных длительностях импульсов;

– записать ряды Фурье, соответствующие разложению сигнала на спектральные составляющие при различных длительностях импульсов;

– рассчитать мощности периодических сигналов при различных длительностях импульсов; сравнить среднюю мощность периодического сигнала, полученную в соответствии с выражением (1.13), и среднюю мощность этого же сигнала, полученную при различном числе спектральных составляющих.

3. Сделать объемные выводы о проделанной работе.

### *Пример выполнения контрольного задания № 2.*

Разложим на спектральные составляющие периодическую последовательность импульсов, одиночный импульс которой был рассмотрен в контрольном задании № 1. В контрольном задании № 1 получено аналитическое описание этого импульса:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{4U}{\tau_{\text{и}}} t + 2U = 1 \cdot 10^5 t + 8, \text{В} & \text{при } -\frac{\tau_{\text{и}}}{2} \leq t < -\frac{\tau_{\text{и}}}{4}; \\ U = 4, \text{В} & \text{при } -\frac{\tau_{\text{и}}}{4} \leq t < \frac{\tau_{\text{и}}}{4}; \\ -\frac{4U}{\tau_{\text{и}}} t + 2U = -1 \cdot 10^5 t + 8, \text{В} & \text{при } \frac{\tau_{\text{и}}}{4} \leq t < \frac{\tau_{\text{и}}}{2}. \end{cases}$$

Произведем разложение этого сигнала на спектральные составляющие в соответствии с (2.12), не производя аналитического вычисления соответствующих коэффициентов. Параметры импульсов в последовательности соответствуют исходному заданию ( $n = 1$ ). Вычисления произведем, используя математический пакет MATCAD.

Описание последовательности импульсов выглядит следующим образом ( $N$  — число спектральных составляющих, ограничивающих расчеты):

$$n := 1 \quad q := 2 \quad N := 50 \quad k := 1..N \quad U := 4 \quad \tau := 1.6 \cdot 10^{-4} \quad T := q \cdot \tau \quad \omega_1 := 2 \cdot \frac{\pi}{T}$$

$$a_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau \cdot n}{2}}^{-\frac{\tau \cdot n}{4}} \left( 4 \cdot \frac{U}{\tau \cdot n} \cdot t + 2 \cdot U \right) dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau \cdot n}{4}}^{\frac{\tau \cdot n}{4}} U dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{\frac{\tau \cdot n}{4}}^{\frac{\tau \cdot n}{2}} \left( -4 \cdot \frac{U}{\tau \cdot n} \cdot t + 2 \cdot U \right) dt$$

$$a_{1k} := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau \cdot n}{2}}^{-\frac{\tau \cdot n}{4}} \left( 4 \cdot \frac{U}{\tau \cdot n} \cdot t + 2 \cdot U \right) \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt \quad a_{2k} := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau \cdot n}{4}}^{\frac{\tau \cdot n}{4}} U \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

$$a_{3k} := \frac{2}{T} \cdot \int_{\frac{\tau \cdot n}{4}}^{\frac{\tau \cdot n}{2}} \left( -4 \cdot \frac{U}{\tau \cdot n} \cdot t + 2 \cdot U \right) \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt \quad a_k := a_{1k} + a_{2k} + a_{3k}$$

$$u(t) := a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) \quad A_k := \sqrt{(a_k)^2}$$

При  $N=10$  на рис. К2.1 приведен спектр амплитуд последовательности импульсов, а на рис. К2.2 – форма аппроксимированного сигнала.

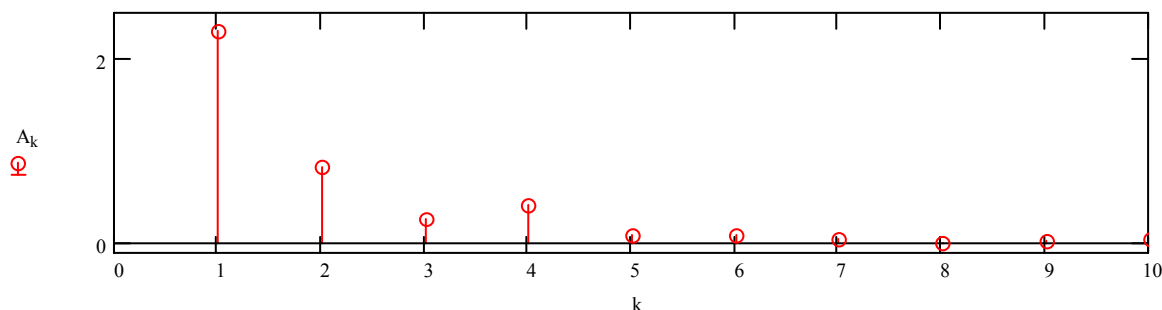


Рис. К2.1. Спектр амплитуд последовательности импульсов при  $N=10$



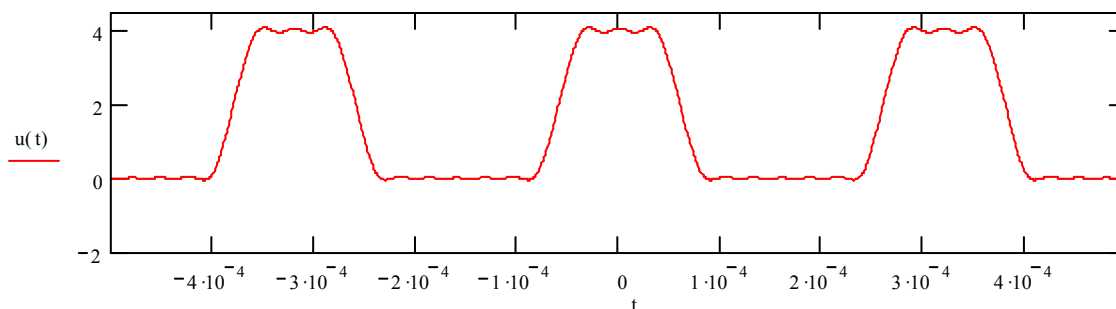


Рис. К2.2. Форма аппроксимированного сигнала при N=10

На рис. К2.3 приведена форма аппроксимированного сигнала при N=50.

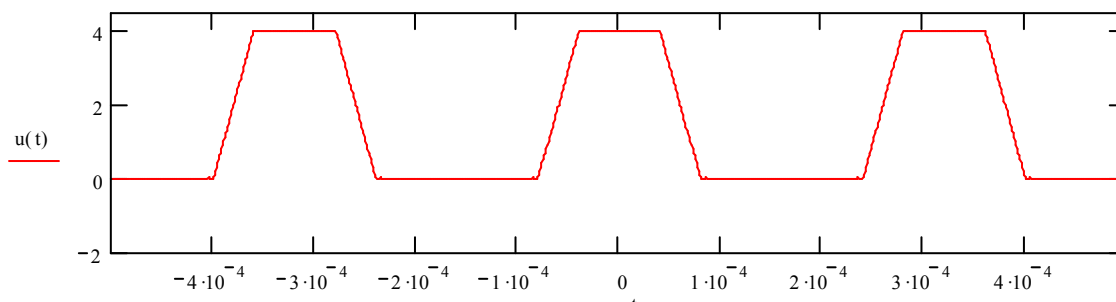


Рис. К2.3. Форма аппроксимированного сигнала при N=50

Из рис. К2.2 и рис. К2.3 можно видеть, что исходная последовательность импульсов с достаточной точностью аппроксимируется рядом Фурье.

Получим выражения, описывающие соответствующие коэффициенты ( $a_0/2$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $A_k$ ,  $\varphi_k$ ), входящие в ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{3U\tau_{\text{и}}}{4T}; \quad a_k = \frac{4UT}{k^2\pi^2\tau_{\text{и}}} \left[ \cos\left(k\frac{\pi\tau_{\text{и}}}{2T}\right) - \cos\left(k\frac{\pi\tau_{\text{и}}}{T}\right) \right]; \quad b_k = 0;$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2} = \sqrt{\frac{4UT}{k^2\pi^2\tau_{\text{и}}} \left[ \cos\left(k\frac{\pi\tau_{\text{и}}}{2T}\right) - \cos\left(k\frac{\pi\tau_{\text{и}}}{T}\right) \right]^2};$$

$$\varphi_k = \text{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = \text{arctg}\left(\frac{0}{a_k}\right) = 0.$$

В результате проведенных вычислений имеем ряд Фурье:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_1 t) = \frac{3U\tau_{\text{и}}}{4T} + \sum_{k=1}^N \frac{4UT}{k^2\pi^2\tau_{\text{и}}} \left[ \cos\left(k\frac{\pi\tau_{\text{и}}}{2T}\right) - \cos\left(k\frac{\pi\tau_{\text{и}}}{T}\right) \right] \cos(k\omega_1 t).$$

В ходе выполнения контрольного задания расчеты необходимо провести при различных длительностях импульса, но постоянном периоде следования импульсов. С учетом этого в выражениях, описывающих коэффициенты и сам обобщенный ряд Фурье, длительность импульса  $\tau_{\text{и}}$  заменим на полную длительность импульса  $\tau_{\text{ин}} = \tau_{\text{и}} \cdot n$ , а период следования импульсов примем равным  $T = q\tau_{\text{и}}$ . В этом случае полученные выражения сведутся к виду

$$\frac{a_0}{2} = \frac{3Un}{4q}; \quad a_k = \frac{4Uq}{k^2\pi^2n} \left[ \cos\left(k \frac{\pi n}{2q}\right) - \cos\left(k \frac{\pi n}{q}\right) \right];$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2} = \sqrt{\frac{4Uq}{k^2\pi^2n} \left[ \cos\left(k \frac{\pi n}{2q}\right) - \cos\left(k \frac{\pi n}{q}\right) \right]};$$

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_1 t) = \frac{3Un}{4q} + \sum_{k=1}^N \frac{4Uq}{k^2\pi^2n} \left[ \cos\left(k \frac{\pi n}{2q}\right) - \cos\left(k \frac{\pi n}{q}\right) \right] \cos(k\omega_1 t).$$

Используя полученные выражения, проведем соответствующие расчеты.

На рис. К2.4 представлена форма импульса при  $N=10$ . Соответствующие расчеты представлены и на рис. К2.5 при  $N=50$ .

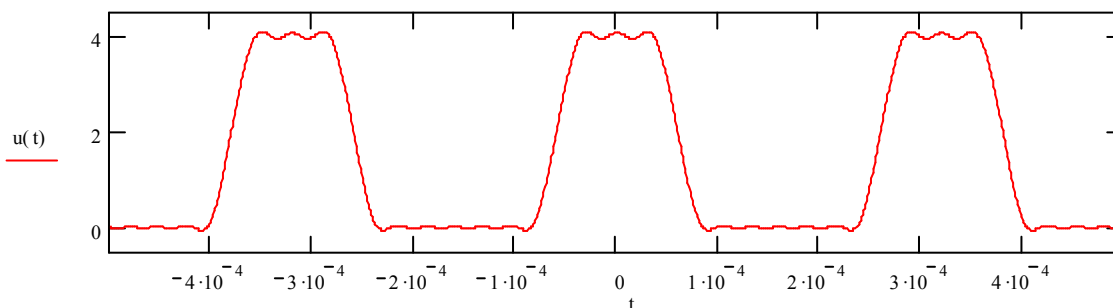


Рис. К2.4. Форма аппроксимированной последовательности импульсов при  $N=10$ , полученная в соответствии с аналитическими выражениями

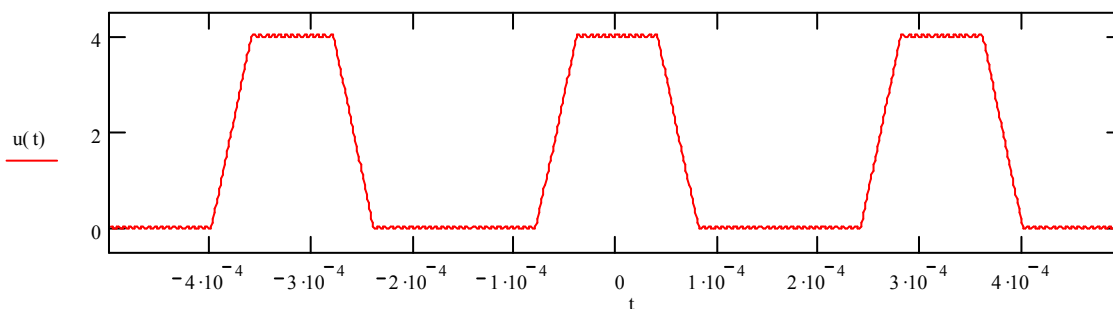


Рис. К2.5. Форма аппроксимированной последовательности импульсов при  $N=50$ , полученная в соответствии с аналитическими выражениями

В соответствии с результатами, полученными в ходе расчетов при использовании, как исходных выражений, так и аналитических выражений, можно сделать вывод, что они одинаковы.

Рассмотрим влияние длительности импульсов на спектр амплитуд периодической последовательности при условии, что период следования импульсов остается постоянным. Расчеты проведем при  $N=16$ , что будет соответствовать высокой степени аппроксимации исходного сигнала при  $\tau_n = 1,6 \cdot 10^{-4}$  с,  $T = 3,2 \cdot 10^{-4}$  с.

На рис. К2.6 приведена форма импульсов последовательности при  $N=16$  и амплитуды спектральных составляющих при различных  $k$ .

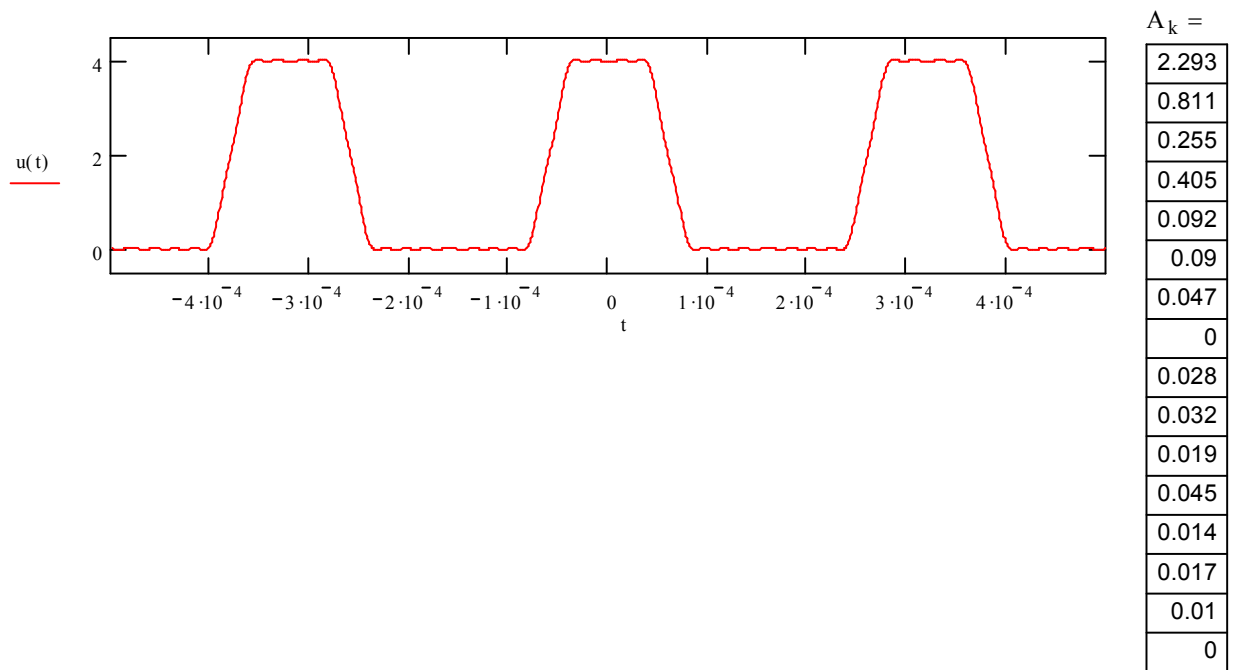


Рис. К2.6. Форма аппроксимированной последовательности импульсов при  $N=16$ , полученная при исходной длительности импульсов ( $n=1$ )

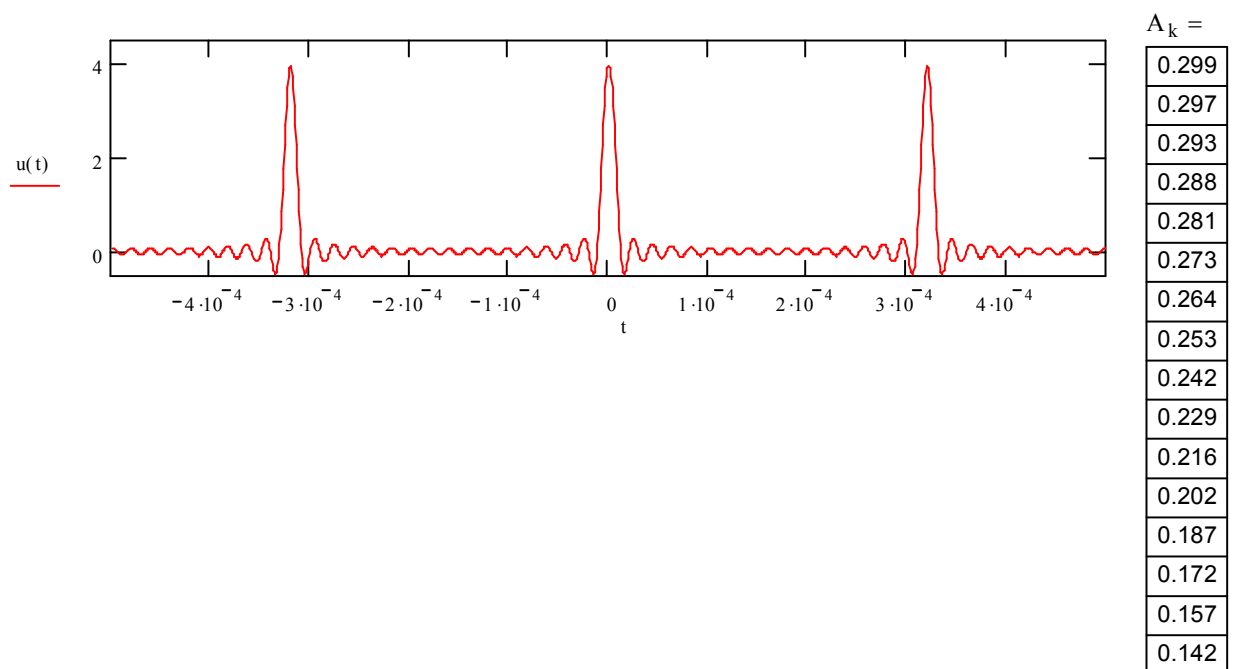


Рис. К2.7. Форма аппроксимированной последовательности импульсов при  $N=16$ , полученная при  $n=0,1$

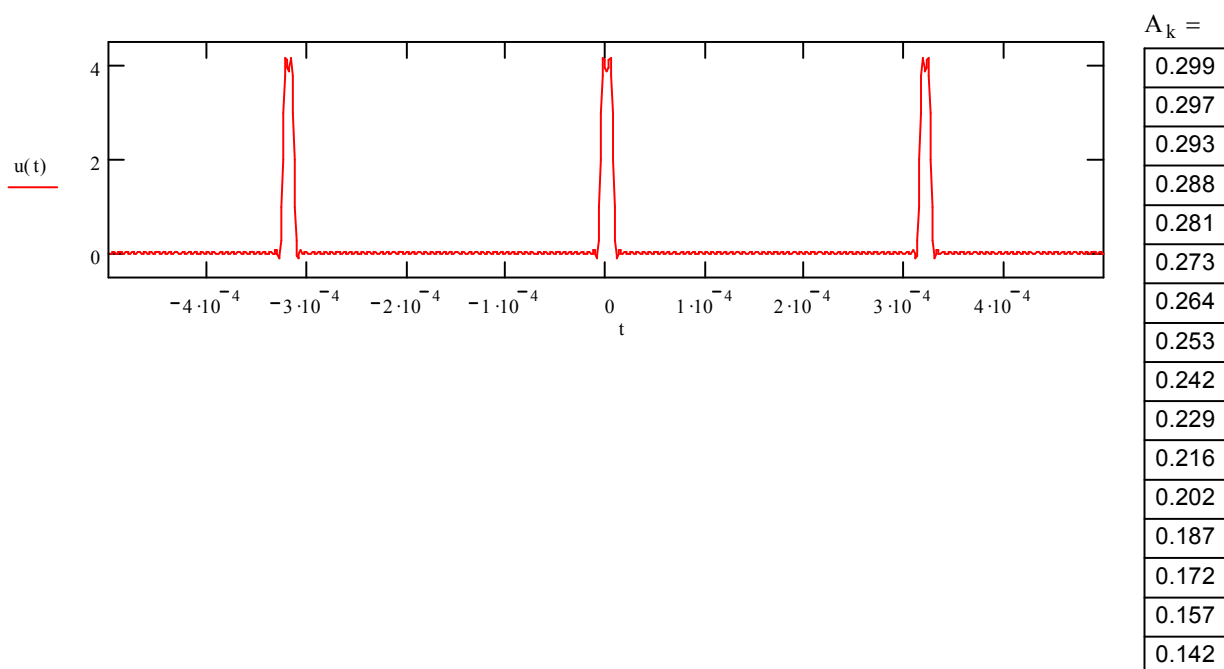


Рис. К2.8. Форма аппроксимированной последовательности импульсов при  $N=50$ , полученная при  $n=0,1$

Для примера рассчитаем среднюю мощность исходного сигнала при различном числе спектральных составляющих. Для этого используем формулу

$$P = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^N \frac{A_k^2}{2}.$$

Расчеты показывают, что при  $k=1$  средние мощности, полученные в соответствии с интегральным выражением (1.13) и выражением, приведенным выше, отличаются на 9%. При увеличении  $k$  различие этих мощностей уменьшается, так при  $k=6$  это отличие составляет менее 1%.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – 4–е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие для вузов/ Д.В. Васильев, М.Р. Виталь, Ю.Н. Горшенко и др./Под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. – 528 с.
3. Ключев Л.Л. Теория электрической связи. – Минск.: Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.
4. Кириллов В.И. Многоканальные системы передачи: Учебник/ В.И. Кириллов. – М.: Новое знание, 2002. – 751 с.
5. Нефедов В.И. Основы радиоэлектроники: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 399 с.
6. Радиопередающие устройства: Учебник для вузов/ В.В. Шахгильдян, В.Б. Козырев, А.А. Ляховкин и др./Под ред. В.В. Шахгильдяна. – 3–е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 2003. – 560 с.
7. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для сред. проф. образования/ К.Е. Румянцев, П.А. Землянухин, А.И. Окорочков. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 384 с.
8. Соколинский В.Г., Шейнкман В.Г. Частотные и фазовые модуляторы и манипуляторы. – М.: Радио и связь, 1983. – 192 с.
9. Гурский Д., Турбина Е. Mathcad для студентов и школьников. Популярный самоучитель. – СПб.: Питер, 2005. – 400 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. СИГНАЛЫ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ.....</b>	<b>4</b>
1.2. Описание детерминированных сигналов разрывными функциями.....	6
1.3. Динамическое описание сигналов.....	7
1.3.1. Динамическое представление сигнала функцией включения.....	9
1.3.2. Динамическое представление сигнала дельта–функцией.....	9
1.4. Энергетические характеристики вещественного сигнала.....	10
1.5. Энергетические характеристики комплексного сигнала.....	11
1.6. Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье.....	12
1.7. Примеры ортонормированных базисов.....	13
Контрольное задание № 1.....	14
<b>2. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ.....</b>	<b>18</b>
2.1. Описание сложных периодических сигналов рядом Фурье.....	18
2.2. Мощность спектра периодического сигнала.....	22
2.3. Спектральный анализ непериодических сигналов.....	23
2.4. Свойства преобразования Фурье.....	24
2.4.1. Сдвиг сигналов во времени.....	25
2.4.2. Изменение масштаба времени.....	25
2.5. Спектральная плотность мощности детерминированного сигнала.....	26
2.6. Автокорреляционная функция.....	27
Контрольное задание № 2.....	28
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	41