

Контрольное задание № 2

Выполняя контрольное задание, студенту необходимо разложить сложный периодический сигнал на спектральные составляющие, оценить мощность сигнала в соответствии с его спектральным составом и провести сравнительный анализ формы сигнала, полученного при различном числе спектральных составляющих, и исходного сигнала. Выполняя данное контрольное задание, студентам необходимо выполнить следующее.

1. Получить аналитическое описание периодического сигнала (вариант формы импульса и его параметры определяет преподаватель в соответствии с табл. 1.1 – 1.4). **(Импульс и его параметры даны в контрольной №1)**

2. Разложить периодический сигнал на спектральные составляющие. Вычисления произвести для следующих случаев:

– рассматривать длительность импульсов и скважность следования импульсов постоянными, соответствующими исходному заданию;

– уменьшать полную длительность импульса $\tau_{\text{ин}}$ в соответствии со следующим выражением: $\tau_{\text{ин}} = \tau_{\text{и}} \cdot n$, где $n = 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1$, сохраняя неизменным период следования импульсов;

– построить диаграммы спектров амплитуд и спектров фаз для всех рассмотренных случаев, провести их сравнительный анализ;

– определить ширину спектра сигнала в пределах первого лепестка при различных длительностях импульсов;

– записать ряды Фурье, соответствующие разложению сигнала на спектральные составляющие при различных длительностях импульсов;

– рассчитать мощности периодических сигналов при различных длительностях импульсов; сравнить среднюю мощность периодического сигнала, полученную в соответствии с выражением (1.13), и среднюю мощность этого же сигнала, полученную при различном числе спектральных составляющих.

3. Сделать объемные выводы о проделанной работе.

Пример выполнения контрольного задания № 2.

Разложим на спектральные составляющие периодическую последовательность импульсов, одиночный импульс которой был рассмотрен в контрольном задании № 1. В контрольном задании № 1 получено аналитическое описание этого импульса:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{4U}{\tau_{\text{и}}} t + 2U = 1 \cdot 10^5 t + 8, \text{В} & \text{при } -\frac{\tau_{\text{и}}}{2} \leq t < -\frac{\tau_{\text{и}}}{4}; \\ U = 4, \text{В} & \text{при } -\frac{\tau_{\text{и}}}{4} \leq t < \frac{\tau_{\text{и}}}{4}; \\ -\frac{4U}{\tau_{\text{и}}} t + 2U = -1 \cdot 10^5 t + 8, \text{В} & \text{при } \frac{\tau_{\text{и}}}{4} \leq t < \frac{\tau_{\text{и}}}{2}. \end{cases}$$

Произведем разложение этого сигнала на спектральные составляющие в соответствии с (2.12), не производя аналитического вычисления соответствующих коэффициентов. Параметры импульсов в последовательности соответствуют исходному заданию ($n = 1$). Вычисления произведем, используя математический пакет MATHCAD.

Описание последовательности импульсов выглядит следующим образом (N — число спектральных составляющих, ограничивающих расчеты):

$$n := 1 \quad q := 2 \quad N := 50 \quad k := 1..N \quad U := 4 \quad \tau := 1.6 \cdot 10^{-4} \quad T := q \cdot \tau \quad \omega_1 := 2 \cdot \frac{\pi}{T}$$

$$a_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau \cdot n}{2}}^{-\frac{\tau \cdot n}{4}} \left(4 \cdot \frac{U}{\tau \cdot n} \cdot t + 2 \cdot U \right) dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau \cdot n}{4}}^{\frac{\tau \cdot n}{4}} U dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{\frac{\tau \cdot n}{4}}^{\frac{\tau \cdot n}{2}} \left(-4 \cdot \frac{U}{\tau \cdot n} \cdot t + 2 \cdot U \right) dt$$

$$a_{1k} := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau \cdot n}{2}}^{-\frac{\tau \cdot n}{4}} \left(4 \cdot \frac{U}{\tau \cdot n} \cdot t + 2 \cdot U \right) \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt \quad a_{2k} := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau \cdot n}{4}}^{\frac{\tau \cdot n}{4}} U \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

$$a_{3k} := \frac{2}{T} \cdot \int_{\frac{\tau \cdot n}{4}}^{\frac{\tau \cdot n}{2}} \left(-4 \cdot \frac{U}{\tau \cdot n} \cdot t + 2 \cdot U \right) \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt \quad a_k := a_{1k} + a_{2k} + a_{3k}$$

$$u(t) := a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) \quad A_k := \sqrt{(a_k)^2}$$

При $N=10$ на рис. K2.1 приведен спектр амплитуд последовательности импульсов, а на рис. K2.2 – форма аппроксимированного сигнала.

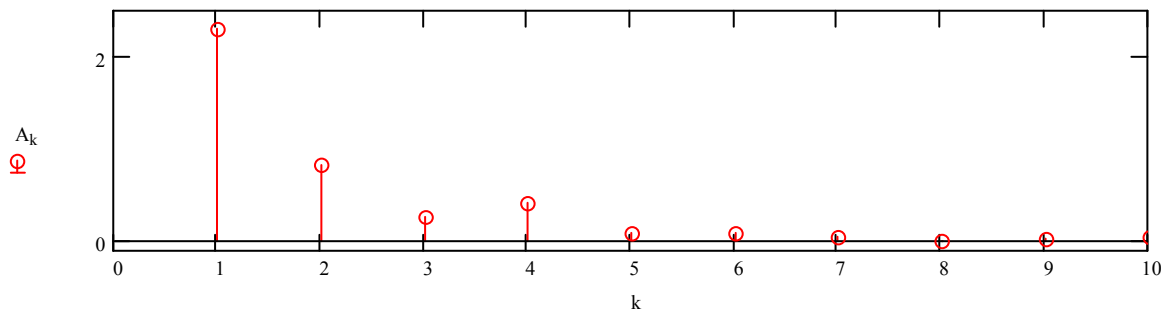


Рис. K2.1. Спектр амплитуд последовательности импульсов при $N=10$

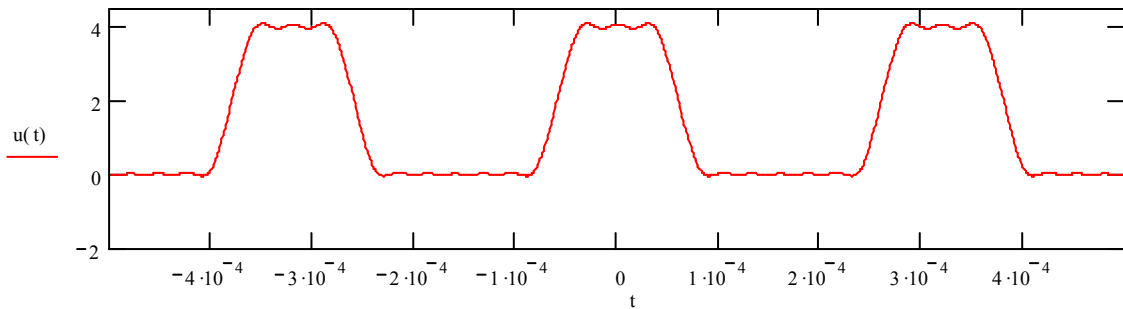


Рис. К2.2. Форма аппроксимированного сигнала при N=10

На рис. К2.3 приведена форма аппроксимированного сигнала при N=50.

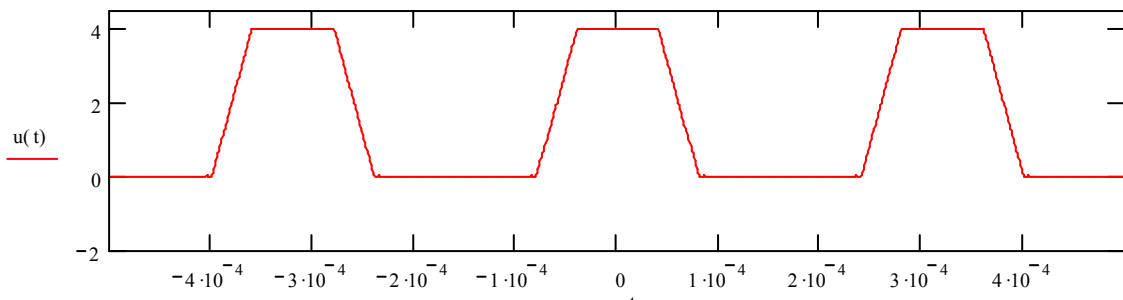


Рис. К2.3. Форма аппроксимированного сигнала при N=50

Из рис. К2.2 и рис. К2.3 можно видеть, что исходная последовательность импульсов с достаточной точностью аппроксимируется рядом Фурье.

Получим выражения, описывающие соответствующие коэффициенты ($a_0/2$, a_k , b_k , A_k , φ_k), входящие в ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{3U\tau_n}{4T}; \quad a_k = \frac{4UT}{k^2\pi^2\tau_n} \left[\cos\left(k \frac{\pi\tau_n}{2T}\right) - \cos\left(k \frac{\pi\tau_n}{T}\right) \right]; \quad b_k = 0;$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2} = \sqrt{\frac{4UT}{k^2\pi^2\tau_n} \left[\cos\left(k \frac{\pi\tau_n}{2T}\right) - \cos\left(k \frac{\pi\tau_n}{T}\right) \right]^2};$$

$$\varphi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = \arctg\left(\frac{0}{a_k}\right) = 0.$$

В результате проведенных вычислений имеем ряд Фурье:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_1 t) = \frac{3U\tau_n}{4T} + \sum_{k=1}^N \frac{4UT}{k^2\pi^2\tau_n} \left[\cos\left(k \frac{\pi\tau_n}{2T}\right) - \cos\left(k \frac{\pi\tau_n}{T}\right) \right] \cos(k\omega_1 t)$$

В ходе выполнения контрольного задания расчеты необходимо провести при различных длительностях импульса, но постоянном периоде следования импульсов. С учетом этого в выражениях, описывающих коэффициенты и сам обобщенный ряд Фурье, длительность импульса τ_n заменим на полную длительность импульса $\tau_{ин} = \tau_n \cdot n$, а период следования

импульсов примем равным $T = q\tau_n$. В этом случае полученные выражения сведутся к виду

$$\frac{a_0}{2} = \frac{3Un}{4q}; \quad a_k = \frac{4Uq}{k^2\pi^2n} \left[\cos\left(k \frac{\pi n}{2q}\right) - \cos\left(k \frac{\pi n}{q}\right) \right];$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2} = \sqrt{\frac{4Uq}{k^2\pi^2n} \left[\cos\left(k \frac{\pi n}{2q}\right) - \cos\left(k \frac{\pi n}{q}\right) \right]};$$

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_1 t) = \frac{3Un}{4q} + \sum_{k=1}^N \frac{4Uq}{k^2\pi^2n} \left[\cos\left(k \frac{\pi n}{2q}\right) - \cos\left(k \frac{\pi n}{q}\right) \right] \cos(k\omega_1 t)$$

Используя полученные выражения, проведем соответствующие расчеты.

На рис. К2.4 представлена форма импульса при $N=10$. Соответствующие расчеты представлены и на рис. К2.5 при $N=50$.

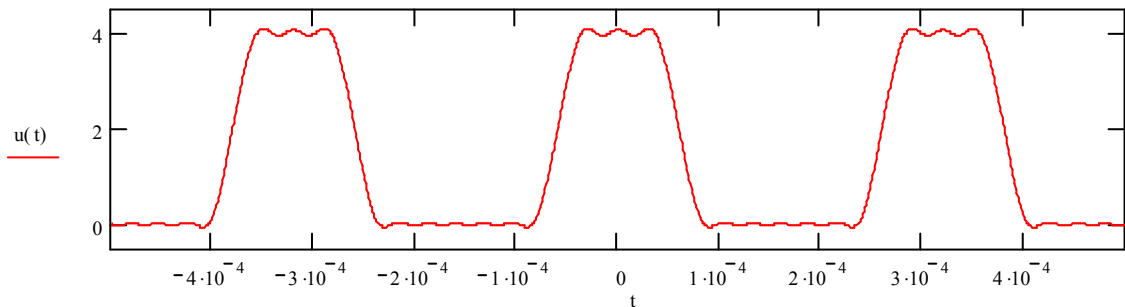


Рис. К2.4. Форма аппроксимированной последовательности импульсов при $N=10$, полученная в соответствии с аналитическими выражениями

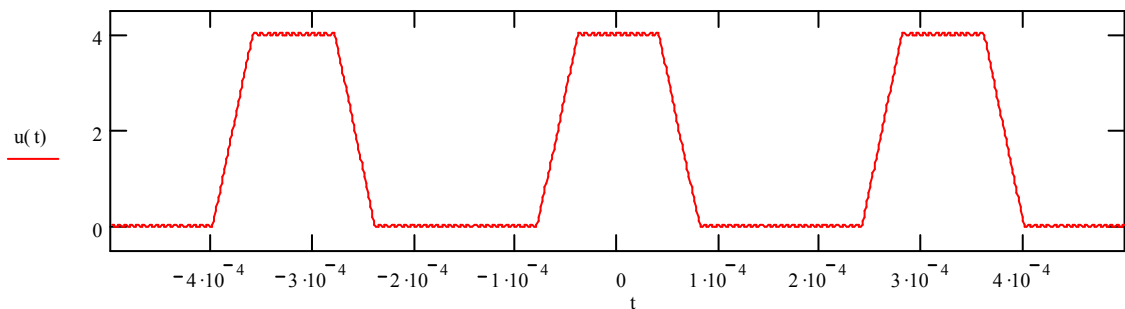


Рис. К2.5. Форма аппроксимированной последовательности импульсов при $N=50$, полученная в соответствии с аналитическими выражениями

В соответствии с результатами, полученными в ходе расчетов при использовании, как исходных выражений, так и аналитических выражений, можно сделать вывод, что они одинаковы.

Рассмотрим влияние длительности импульсов на спектр амплитуд периодической последовательности при условии, что период следования импульсов остается постоянным. Расчеты проведем при $N=16$, что будет

соответствовать высокой степени аппроксимации исходного сигнала при $\tau_n = 1,6 \cdot 10^{-4}$ с, $T = 3,2 \cdot 10^{-4}$ с.

На рис. К2.6 приведена форма импульсов последовательности при $N=16$ и амплитуды спектральных составляющих при различных k .

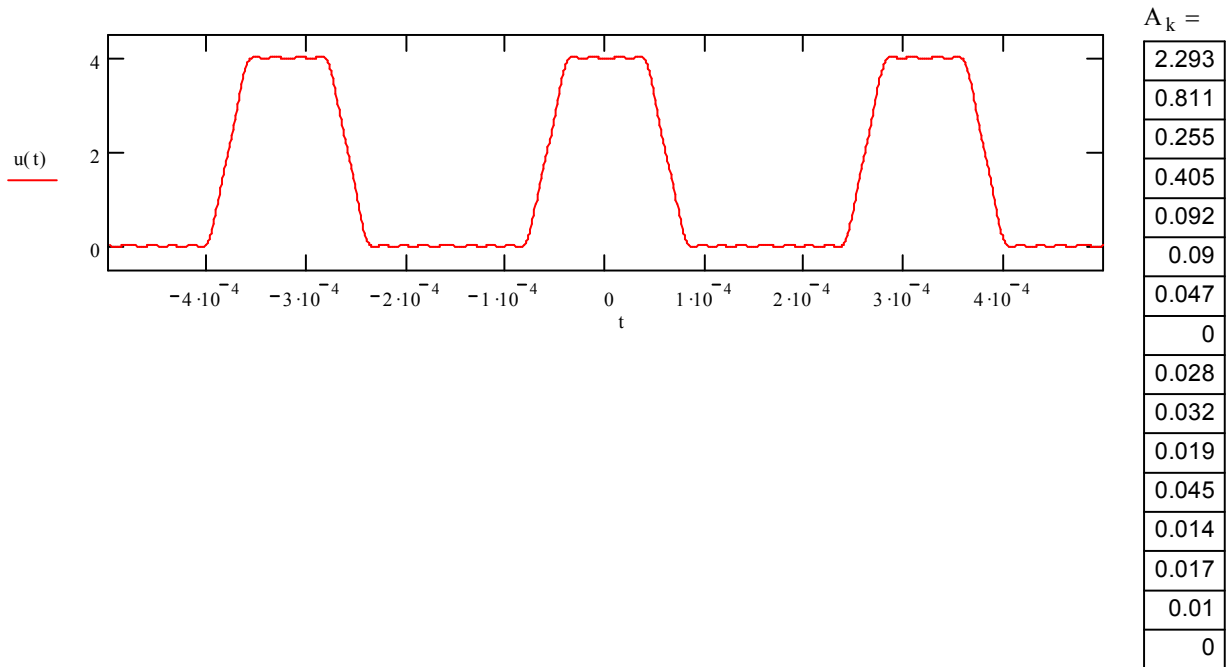


Рис. К2.6. Форма аппроксимированной последовательности импульсов при $N=16$, полученная при исходной длительности импульсов ($n=1$)

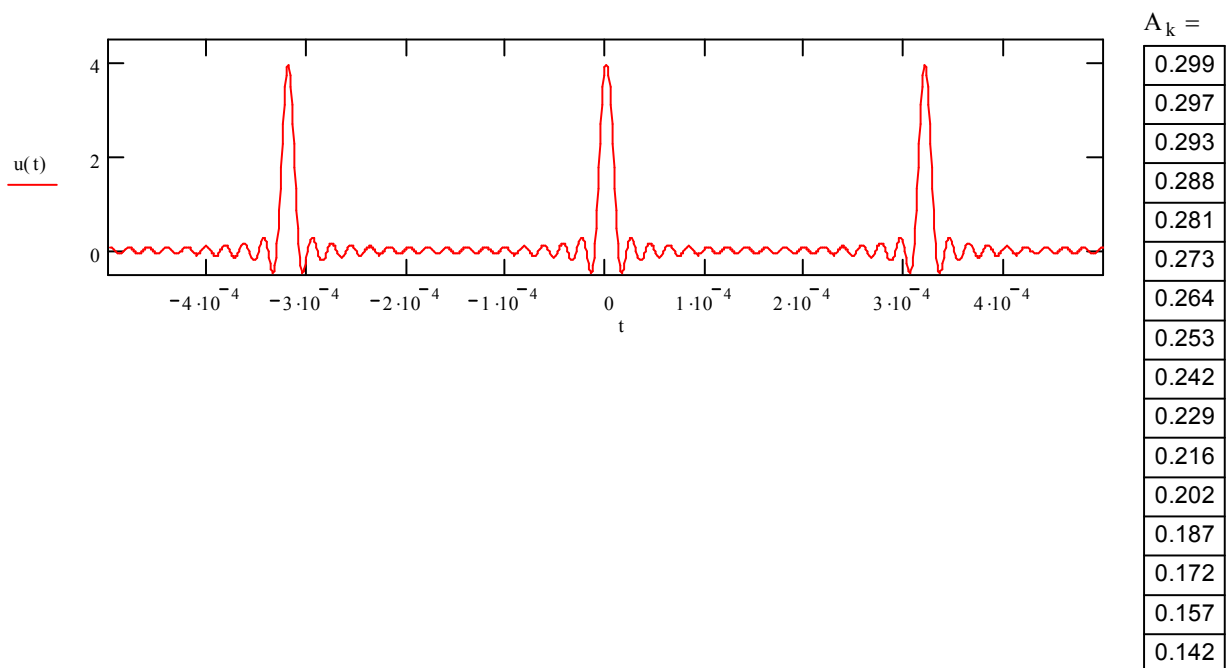


Рис. К2.7. Форма аппроксимированной последовательности импульсов при $N=16$, полученная при $n=0,1$

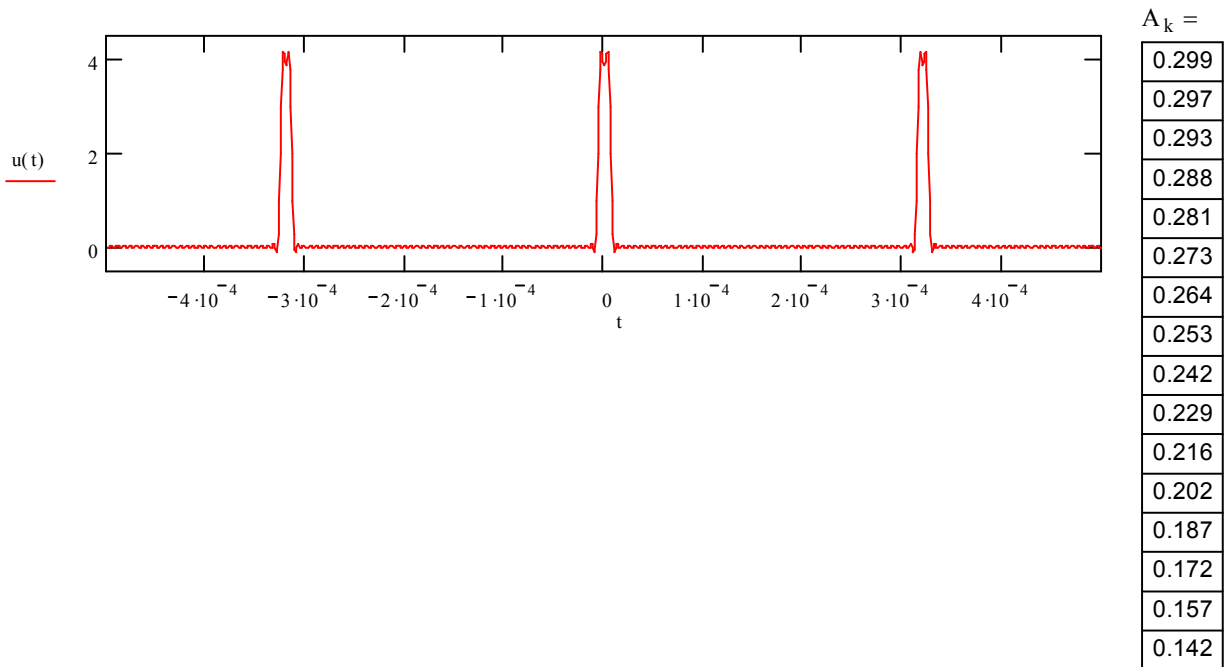


Рис. К2.8. Форма аппроксимированной последовательности импульсов при $N=50$, полученная при $n=0,1$

Для примера рассчитаем среднюю мощность исходного сигнала при различном числе спектральных составляющих. Для этого используем формулу

$$P = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^N \frac{A_k^2}{2}.$$

Расчеты показывают, что при $k = 1$ средние мощности, полученные в соответствии с интегральным выражением (1.13) и выражением, приведенным выше, отличаются на 9%. При увеличении k различие этих мощностей уменьшается, так при $k = 6$ это отличие составляет менее 1%.