Методические рекомендации по курсовой работе

Расчет цепи в переходном режиме классическим методом

Классический метод расчета переходных процессов в электрической цепи заключается в непосредственном решении системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, составленных по схеме цепи после коммутации, и нахождении постоянных интегрирования по начальным условиям. Под начальными условиями понимают значения токов ветвей и напряжений на элементах цепи в момент коммутации.

С целью лучшего усвоения методики расчета переходных процессов классическим методом рассмотрим следующий пример.

Пример.

Определить переходные токи и напряжение на емкости при обрыве провода фазы B трехфазной цепи (рис. 1) при следующих исходных данных:

R_A=10 *Ом*, R_B=20 *Ом*, R_C =20 *Ом*, C =100 *мкФ*, L=0,2 *Гн*;

$e_A=220\sqrt{2}\sin(314t+30°)$ *В*, $e_B=220\sqrt{2}\sin(314t-90°)$ *В*, $e_C=220\sqrt{2}\sin(314t+150°)$ *В*.

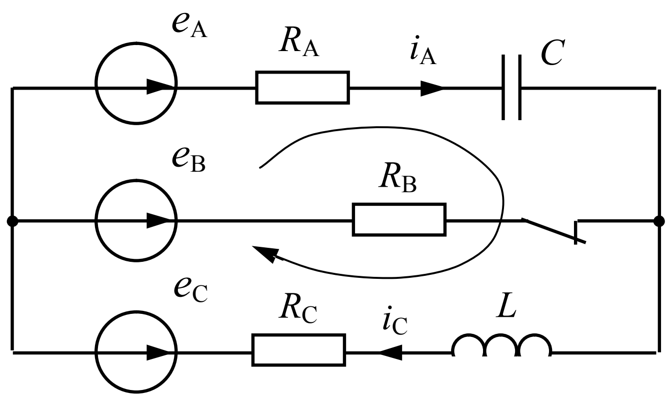

Рис. 1

Решение

1). Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа. Поскольку переходные процессы начинаются с момента коммутации в цепи (обрыв линии фазы *B*), уравнение составляется для схемы после коммутации.

При указанных в схеме направлениях обхода контура и токов i_A, i_C уравнение имеет вид:

$$i_A R_A + u_C + u_L + i_C R_C = e_A - e_C. \qquad (1)$$

Так как $i_A = i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$, а $u_L = L\dfrac{di_C}{dt}$, уравнение записываем в виде:

$$C\frac{du_C}{dt}\cdot R_A + u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt_2} + C\frac{du_C}{dt}\cdot R_C = LC\frac{d^2u_C}{dt_2} + C\frac{du_C}{dt}(R_A+R_C) + u_C = e_A - e_C.$$

Общий интеграл уравнения $LC\dfrac{d^2u_C}{dt_2} + C\dfrac{du_C}{dt}(R_A+R_C) + u_C = e_A - e_C$ (2)

найдем как сумму его частного решения и общего решения однородного дифференциального уравнения $LC\dfrac{d^2u_C}{dt_2} + C(R_A+R_C)\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$. (3)

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения называют принужденной составляющей искомой величины (в данном случае u_C). Если эдс источников постоянны или являются синусоидальными функциями времени, то принужденная составляющая *($u_{C\ пр}$)* равна установившемуся значению определяемой величины ($u_{C.y}$). Общее решение однородного дифференциального уравнения называют свободной составляющей искомой величины ($u_{C.св}$).

Таким образом u_C=$u_{C.св}$+ $u_{C.y}$.

Аналогично $i_A = i_C = i_{A.св} + i_{A.y}$.

2). Определяем установившееся значение напряжения на емкости $u_{C.y}$.

Так как в установившемся режиме напряжения на элементах и токи цепи синусоидальны, расчет $u_{C.y}$ выполним комплексным методом.

$$\underline{I}_{Ay} = \underline{I}_{Cy} = \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_C}{\underline{Z}_ц}.$$

Сопротивление цепи (Ом)

$$\underline{Z}_ц = R_A + R_C + j\left(wL - \frac{1}{wC}\right) = 30 + j\left(314 \cdot 0{,}2 - \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\right) =$$

$$= 30 + j(62{,}8 - 31{,}85) = 30 + j30{,}95 = 43{,}1e^{j45{,}89°}.$$

$$\underline{E}_A - \underline{E}_C = 220e^{j30°} - 220e^{j150°} = 220(\cos 30° + j\sin 30° - \cos 150° - j\sin 150°) =$$

$$= 220(0{,}866 + 0{,}5j + 0{,}866 - j0{,}5) = 381{,}05B$$

$$\underline{I}_{Cy} = \underline{I}_{Ay} = \frac{381{,}05}{43{,}1e^{j45{,}89°}} = 8{,}84e^{-j45{,}89°}A.$$

Установившиеся токи: $i_{Ay} = i_{Cy} = \sqrt{2} \cdot 8{,}84\sin(314t - 45{,}89°)A$.

Комплексное напряжение на емкости:

$$\underline{U}_{Cy} = \underline{I}_{Cy} \cdot \left(-j\frac{1}{wC}\right) = 8{,}84e^{-j45{,}89°}(-j31{,}85) = 281{,}6e^{-j135{,}89°}B$$

Установившееся напряжение на емкости:

$$u_{Cy} = \sqrt{2} \cdot 281{,}6\sin(314t - 135{,}89°)B.$$

3). Определяем свободные составляющие токов и напряжения на емкости. Однородное дифференциальное уравнение (3) решается с помощью характеристического уравнения. Характеристическое уравнение составляется путем замены $\frac{d^2u_C}{dt_2}$ на P^2, $\frac{du_C}{dt}$ — на P, u_C — на единицу. В итоге получим:

$$LCP^2+C(R_A+R_C)P+1=0. \qquad (4)$$

Сокращая уравнение (4) на LC, запишем:

$$P^2 + \frac{R_A + R_C}{L}P + \frac{1}{LC} = 0.$$

Корни характеристического уравнения (4):

$$P_{1,2} = -\frac{R_A + R_C}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R_A + R_C}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \qquad (5)$$

Подставив значения R_A, R_C, L, C в формулу (5), получим:

$$P_{1,2} = -75 \pm \sqrt{5625 - 50000} = -75 \pm j210{,}65 = -\delta \pm j\omega .$$

Так как корни P_1 и P_2 — комплексные сопряженные, значения свободных токов и напряжение на емкости запишем в виде:

$$u_C = B_1 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \lambda_1); \qquad (6)$$

$$i_A = i_C = B_2 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \lambda_2). \qquad (7)$$

Определяем постоянные интегрирования B_1, λ_1, B_2, λ_2. Для этого запишем уравнения (6) и (7) при $t = 0$:

$$u_c(0)=B_1 \sin\lambda_1; \qquad (8)$$

$$i_A(0) = i_C(0) = B_2 \sin\lambda_2. \qquad (9)$$

Так как неизвестных в уравнениях (8) и (9) больше двух, дифференцируем уравнения (6) и (7) и записываем полученные уравнения при $t = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= B_1(-\delta)e^{-\delta t}\sin(\omega t + \lambda_1) + B_1\omega e^{-\delta t}\cos(\omega t + \lambda_1); \\ \frac{di_C}{dt} &= B_2(-\delta)e^{-\delta t}\sin(\omega t + \lambda_2) + B_2\omega e^{-\delta t}\cos(\omega t + \lambda_2); \end{aligned}\right. \qquad (10)$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = B_1(-\delta)\sin\lambda_1 + B_1\omega\cos\lambda_1;$$

$$\left.\frac{di_C}{dt}\right|_{t=0} = B_2(-\delta)\sin\lambda_2 + B_2\omega\cos\lambda_2. \qquad (11)$$

В итоге постоянные интегрирования определяются путем решения уравнений:

$$\left.\begin{aligned} u_C(0) &= B_1 \sin\lambda_1, \\ \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} &= B_1(-\delta)\sin\lambda_1 + B_1\omega\cos\lambda_1 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} i_C(0) &= B_2 \sin\lambda_2, \\ \left.\frac{di_C}{dt}\right|_{t=0} &= B_2(-\delta)\sin\lambda_2 + B_2\omega\cos\lambda_2 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

При этом значения величин в левых частях уравнений должны быть предварительно рассчитаны.

В момент коммутации ($t = 0$) справедливы следующие выражения:

$u_{C\,св}=u_C(0) - u_{C\,у}(0)$; $i_{C\,св}=i_C(0) - i_{C\,у}(0)$;

$u_{C\,у}(0)=\sqrt{2}\cdot 281{,}6\cdot \sin(-135{,}39^0)=-277{,}19$ *В*;

$i_{C\,у}(0)= i_{A\,у}(0)= \sqrt{2}\cdot 8{,}84 \sin(-45{,}39^0)=8{,}98$ *А*.

Независимые начальные условия ($u_C(0)$ и $i_C(0)$) определяются по законам коммутации:

по первому закону коммутации $i_C(0) = i_C(0-)$, где $i_C(0-)$ - значение тока фазы *С* непосредственно до коммутации; по второму закону коммутации $u_C(0)= u_C(0-)$, где $u_C(0-)$ — значение напряжения на емкости непосредственно до коммутации.

Из уравнения (1) при $t=0$ определяем значение напряжения на индуктивности: $u_L(0)=L\frac{di_C}{dt}\Big|_{t=0}=e_A(0)-e_C(0)-i_C(0)(R_A+R_C)-u_C(0)$.

Тогда производная тока i_C $\frac{di_C}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{e_A(0)-e_C(0)-i_C(0)(R_A+R_C)-u_C(0)}{L}$.

4). Определяем напряжение на емкости и ток фазы С непосредственно до коммутации. Для этого в начале определяем мгновенные значения тока фазы С и напряжения на емкости до коммутации.

Так как до коммутации токи цепи и напряжения были синусоидальными, расчет проводим комплексным методом.

$\underline{U}_{An}=\frac{\underline{U}_{AB}\underline{Y}_B-\underline{U}_{CA}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_B+\underline{Y}_B+\underline{Y}_C}$, где $\underline{U}_{AB}=\sqrt{3}\underline{E}_A e^{j30°}=381{,}05e^{j60°}B$;

$\underline{U}_{CA}=\underline{U}_{AB}\cdot a=381{,}05e^{j60°}\cdot e^{j120°}=381{,}05e^{j180°}B.$

Проводимости ветвей:

$$\underline{Y}_A=\frac{1}{\underline{Z}_A}=\frac{1}{R_A-j\frac{1}{wC}}=\frac{1}{10-j31{,}85}=\frac{1}{33{,}38e^{-j72{,}57°}}=0{,}03e^{j72{,}57°}\,См;$$

$$\underline{Y}_B=\frac{1}{R_B}=\frac{1}{20}=0{,}05\ См;\quad \underline{Y}_C=\frac{1}{\underline{Z}_C}=\frac{1}{20+j62{,}8}=\frac{1}{65{,}91e^{j72{,}33°}}=0{,}0152e^{-j72{,}33°}\,См.$$

$$\underline{U}_{An}=\frac{381{,}05e^{j60°}\cdot0{,}05-381{,}05e^{j180°}\cdot0{,}0152e^{-j72{,}33°}}{0{,}03e^{j75{,}57°}+0{,}05+0{,}0152e^{-j72{,}33°}}=\frac{11{,}29+j10{,}98}{0{,}0621+j0{,}0146}=\frac{15{,}75e^{j44{,}2°}}{0{,}0638e^{j13{,}23°}}=$$

$$=246{,}86e^{j30{,}96°}B;$$

$$\underline{I}_A=\frac{\underline{U}_{An}}{\underline{Z}_A}=\frac{246{,}86e^{j30{,}96°}}{33{,}38e^{-j72{,}57°}}=7{,}4e^{j103{,}53°}A;$$

$$\underline{U}_C=\underline{I}_A\cdot\left(-j\frac{1}{wC}\right)=7{,}4e^{j103{,}53°}\cdot31{,}85e^{-j90°}=235{,}69e^{j13{,}53°}B.$$

Мгновенное значение напряжения на емкости до коммутации:

$u_{C\,д.к.}=\sqrt{2}\cdot235{,}69\cdot\sin(314t+13{,}53°)\ B;$

$u_C(0-)=\sqrt{2}\cdot235{,}69\sin13{,}53°=77{,}98\ B.$

$$\underline{U}_{Cn}=\frac{\underline{U}_{CA}\cdot\underline{Y}_A-\underline{U}_{BC}\cdot\underline{Y}_B}{\underline{Y}_A+\underline{Y}_B+\underline{Y}_C}=\frac{381{,}05e^{j180°}\cdot0{,}03e^{j72{,}57°}-381{,}05e^{-j60°}\cdot0{,}05}{0{,}0621+j0{,}0146}=$$

$$=\frac{-12{,}92+j5{,}5}{0{,}0621+j0{,}0146}=\frac{14{,}04e^{j156{,}9°}}{0{,}0638e^{j13{,}23°}}=220{,}06e^{j143{,}67°}B$$

$$\underline{I}_C=\frac{\underline{U}_{nC}}{\underline{Z}_C}=\frac{\underline{U}_{Cn}\cdot e^{-j180°}}{\underline{Z}_C}=\frac{220{,}06e^{j143{,}67°}\cdot e^{-j180°}}{65{,}91e^{j72{,}33°}}=3{,}34e^{-j108{,}66°}A.$$

Мгновенное значение тока фазы C до коммутации:

$i_{C\,д.к.}=\sqrt{2}\cdot3{,}34\sin(314t-108{,}66°)\ A.$

Ток фазы C непосредственно до коммутации:

$i_C(0-)=\sqrt{2}\cdot3{,}34\cdot\sin(-108{,}66°)=-4{,}48$ А.

5). Определяем значения свободных составляющих напряжения на емкости и тока фазы C и производных этих величин в момент коммутации.

Напряжение и ток в момент коммутации:

$u_C(0) = u_C(0\text{-}) = 77{,}98$ *В*; $i_C(0) = i_C(0\text{-}) = -4{,}48$ А.

Свободные составляющие напряжения и тока:

$u_{C\,св.}(0) = u_C(0) - u_{C\,у}(0) = 77{,}98 - (-277{,}19) = 355{,}17$ *В,*

$i_{C\,св}(0) = i_C(0) - i_{C\,у}(0) = -4{,}48 - (-8{,}98) = 4{,}5$ *А.*

Производная тока в момент коммутации:

$$\frac{di_C}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\sqrt{2}\cdot 220(\sin 30^\circ - \sin 150^\circ) + 4{,}48\cdot 30 - 77{,}98}{0{,}2} = 282{,}1$$

Производная свободной составляющей тока i_C в момент коммутации:

$$\frac{di_{Cсв.}}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{di_C}{dt}\bigg|_{t=0} - \frac{di_{Cy}}{dt}\bigg|_{t=0};$$

$$\frac{di_{Cy}}{dt} = \sqrt{2}\cdot 8{,}84\cos(314t - 45{,}89^\circ)\cdot 314;$$

$$\frac{di_{Cy}}{dt}\bigg|_{t=0} = \sqrt{2}\cdot 8{,}84\cos 45{,}89\cdot 314 = 2732{,}31;$$

$$\frac{di_{Cсв.}}{dt}\bigg|_{t=0} = 282{,}1 - 2732{,}31 = -2450{,}21.$$

Производная свободной составляющей напряжения на емкости в момент коммутации:

$$\frac{du_{Cсв.}}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{C} i_{Cсв.}(0) = \frac{1}{100\cdot 10^{-6}}\cdot 4{,}5 = 45000.$$

6).Определяем постоянные интегрирования.

Подставив в уравнения (12), (13) найденные значения свободных составляющих напряжения на емкости, тока фазы *C* и производных этих величин, получим:

$355{,}17 = B_1 \sin \lambda_1,$

$45000 = B_1(-\delta)\sin \lambda_1 + B_1\omega_{св}\cos\lambda_1;$

$4{,}5 = B_2 \sin\lambda_2,$

$-2450{,}21 = B_2(-\delta)\sin\lambda_2 + B_2\omega_{св}\cos\lambda_2.$

Далее: $\sin\lambda_1 = \dfrac{355{,}17}{B_1}$; $\quad 45000 = B_1(-75)\cdot\dfrac{355{,}17}{B_1} + B_1\cdot 210{,}65\cos\lambda_1;$

$$\cos\lambda = \frac{45000 + 75\cdot 355{,}17}{B_1\cdot 210{,}65} = \frac{340{,}08}{B_1}; tg\lambda_1 = \frac{355{,}17}{340{,}08} = 1{,}044,\ \lambda_1 = 46{,}23^\circ; B_1 = 491{,}84.$$

Рассчитывая аналогично B_2 и λ_2, получим:

$\lambda_2 = 155{,}84^\circ$; $B_2 = 11$.

7). Переходные напряжение на емкости и ток фазы *C*:

$$u_C = 491{,}84e^{-75t}\cdot\sin(210{,}65t + 46{,}23^\circ) + \sqrt{2}\cdot 281{,}6\sin(314t - 135{,}89^\circ)\ B;$$

$$i_C = 11e^{-75t}\sin(210{,}65t + 155{,}84^\circ) + \sqrt{2}\cdot 8{,}84\sin(314t - 45{,}89^\circ)\ A.$$

Расчет цепи операторным методом

Расчет переходных процессов операторным методом основан на представлении непрерывных или кусочно-непрерывных функций времени, имеющих ограниченный порядок возрастания и обращаемых в нуль при $t < 0$, функциями комплексного переменного $P=S+j$w. Связь между функцией времени ¦*(t),* называемой оригиналом, и соответствующей ей функцией комплексного переменного *F(P)*, называемой операторным изображением функции времени, записывается так: ¦*(t) = F(P).*

Переход от оригинала к изображению функции времени осуществляется с помощью прямого преобразования Лапласа:

$$F(P) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt.$$

Операторное изображение, например, постоянной A, т. е.

$$A(P) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-pt} \cdot dt = -\frac{A}{P} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{P}.$$

Операторное изображение напряжения на индуктивности

$$U_L(P) = \int_0^{\infty} L \frac{di}{dt} \cdot e^{-pt} \cdot dt = PLI(P) - Li(0), \qquad (1)$$

где *I(P)* - операторное изображение тока, $i(0)$ - ток в ветви с индуктивностью в момент коммутации.

Уравнению (1) соответствует операторная схема замещения индуктивности (рис.2)

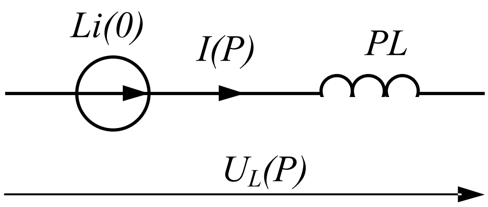

Рис. 2

Операторное изображение напряжения на емкости:

$$U_C(P) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{C} \cdot \int_0^t i dt + U_C(0) \right) e^{-pt} dt = \frac{1}{PC} I(P) + \frac{U_C(0)}{P}. \qquad (2)$$

Уравнению (2) соответствует операторная схема замещения емкости (рис.3.)

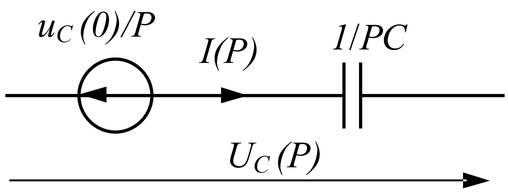

Рис. 3

Представление токов и напряжений на элементах цепи их операторными изображениями позволяет свести систему дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в этой цепи, к системе алгебраических уравнений, решение которых значительно проще.

Переход от изображений напряжений и токов к оригиналам осуществляется с помощью обратного преобразования Лапласа $f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega}F(P)e^{pt}dp$, а также по формулам соответствия функций комплексного переменного функциям времени, приводимым в математических справочниках.

В случаях, когда изображение представляет собой рациональную дробь вида:

$$\frac{M(P)}{N(P)}=\frac{a_0P^m+a_1P^{m-1}+\ldots+a_m}{B_0P^m+b_1P^{n-1}+\ldots+b_n},$$

у которой $m<n$, а полином $N(P)=0$ не имеет кратных корней, переход от изображения к оригиналу осуществляется по формуле:

$\dfrac{M(P)}{N(P)}=f(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{M(P_k)}{N'(P_k)}\cdot e^{P_k t}$, называемой теоремой разложения, где $P_к$- корни уравнения $N(P)=0$.

При расчете переходных процессов операторным методом оригиналы токов и напряжений цепи сразу выражаются суммами установившихся и свободных токов и напряжений.

Расчет можно упростить, если установившиеся составляющие токов и напряжений определять методами расчета цепей постоянного или синусоидального тока (если *ЭДС* источников или постоянны или синусоидальны), а операторным методом рассчитывать только свободные составляющие токов и напряжений.

В качестве примера такого подхода к расчету переходных процессов определим свободный ток фазы *C* в приведенной на рис.1 трехфазной цепи, считая, что установившийся ток $i_{C\,y}$, а также $u_C(0)$ и $i_C(0)$ рассчитаны в предыдущем примере.

Расчет проводим в следующей последовательности.

1). Составляем операторную схему замещения цепи после коммутации (рис. 4). Важно отметить, что эдс e_A и e_C в схеме не должно быть.

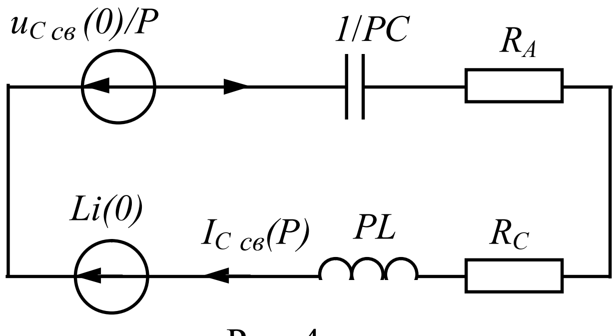

Рис. 4.

По закону Ома в операторной форме

$$I_{Cсв.}(P)=2\frac{Li_{Cсв.}(0)-\frac{u_{Cсв.}(0)}{P}}{R_A+R_C+PL+\frac{1}{PC}}=\frac{C\left(PLi_{Cсв.}(0)-u_{Cсв.}(0)\right)}{P^2LC+\left(R_A+R_C\right)CP+1}.$$

Подставив значение заданных $R_{\text{а}}$, $R_{\text{с}}$, L, C, а также найденных в предыдущем примере значений $i_{\text{C св.}}(0)$, $U_{\text{C св.}}(0)$, получим:

$$I_{cc.}(P)=\frac{100\cdot10^{-6}\left(P\cdot0{,}2\cdot4{,}5-355{,}17\right)}{P^2\cdot0{,}2\cdot100\cdot10^{-6}+30\cdot100\cdot10^{-6}+1}=\frac{9\cdot10^{-5}\cdot P-3{,}552\cdot10^{-2}}{2\cdot10^{-5}\cdot P^2+3\cdot10^{-3}P+1}=\frac{M(P)}{N(P)}$$

2. Переходим от изображения свободного тока фазы C к оригиналу.

Переход к оригиналу осуществляем по теореме разложения:

$$i_{cc.}=\sum_{k=1}^{n}\frac{M_1(P_k)}{N_1'(P_k)}\cdot e^{p_k t}.$$

Корни уравнения $N(P)=P^2LC+(R_{\text{а}}+R_{\text{с}})CP+1=0$ по предыдущему примеру равны: $P_{1,2}=-75\pm j210{,}65$.

Производная $N_1'(P)=4\cdot10^{-5}\cdot P+3\cdot10^{-3}$

По теореме разложения $i_{C\,св}=((M(P_1)/N'(P_1))\cdot e^{P_1\cdot t}+((M(P_2)/N'(P_2))\cdot e^{P_2\cdot t}$.

При сопряженных комплексных корнях уравнения $N(P)=0$ достаточно вычислить первое слагаемое суммы только для корня P_1, а для корня P_2 взять значение, сопряженное первому слагаемому. Так как мнимые части двух слагаемых сокращаются, значение свободной составляющей тока фазы C будет равно:

$i_{C\,св}=2Re\left[\left((M(P_1)/N'(P_1)\right)\cdot e^{P_1\cdot t}\right]=$

$=2Re\left[(9\cdot10^{-5}\cdot(-75+j210{,}65)-3{,}552)/\left(4\cdot10^{-5}(-75+j210.65)+3\cdot10^{-3}\right)\right]\cdot e^{(-75+j\,210.65)\cdot t}=$

$=2Re(5{,}51\cdot e^{\,j65{,}89о}\cdot e^{(-75+j\,210.65)t})=11{,}01\cdot e^{\,-j\,75о}\cdot cos(210{,}65t+65{,}89^0)$.

Ответ: $i_{c\,св.}=11{,}01\mathrm{e}^{-75t}\cdot sin(210{,}65t+155{,}89^0)$ A.