

## **Методические рекомендации по курсовой работе**

### Расчет цепи в переходном режиме классическим методом

Классический метод расчета переходных процессов в электрической цепи заключается в непосредственном решении системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, составленных по схеме цепи после коммутации, и нахождении постоянных интегрирования по начальным условиям. Под начальными условиями понимают значения токов ветвей и напряжений на элементах цепи в момент коммутации.

С целью лучшего усвоения методики расчета переходных процессов классическим методом рассмотрим следующий пример.

*Пример.*

Определить переходные токи и напряжение на емкости при обрыве провода фазы В трехфазной цепи (рис. 1) при следующих исходных данных:

$$R_A=10 \text{ Ом}, R_B=20 \text{ Ом}, R_C=20 \text{ Ом}, C=100 \text{ мкФ}, L=0,2 \text{ Гн};$$

$$e_A=220\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ) \text{ В}, e_B=220\sqrt{2}\sin(314t-90^\circ) \text{ В}, e_C=220\sqrt{2}\sin(314t+150^\circ) \text{ В}.$$

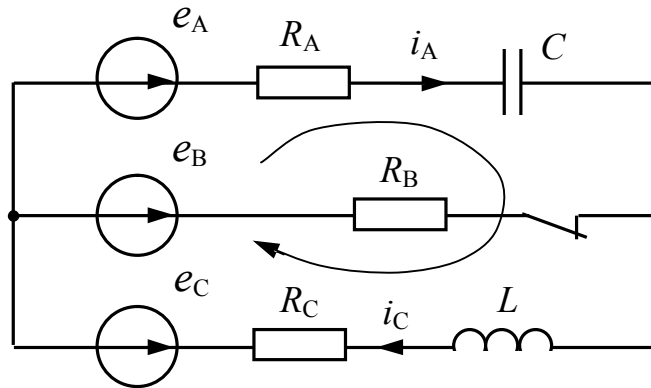


Рис. 1

*Решение*

1). Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа. Поскольку переходные процессы начинаются с момента коммутации в цепи (обрыв линии фазы В), уравнение составляется для схемы после коммутации.

При указанных в схеме направлениях обхода контура и токов  $i_A, i_C$  уравнение имеет вид:

$$i_A R_A + u_C + u_L + i_C R_C = e_A - e_C. \quad (1)$$

Так как  $i_A = i_C = C \frac{du_C}{dt}$ , а  $u_L = L \frac{di_C}{dt}$ , уравнение записываем в виде:

$$C \frac{du_C}{dt} \cdot R_A + u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + C \frac{du_C}{dt} \cdot R_C = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + C \frac{du_C}{dt} (R_A + R_C) + u_C = e_A - e_C.$$

$$\text{Общий интеграл уравнения } LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + C \frac{du_C}{dt} (R_A + R_C) + u_C = e_A - e_C \quad (2)$$

найдем как сумму его частного решения и общего решения однородного диф-

$$\text{ференциального уравнения } LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + C(R_A + R_C) \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (3)$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения называют принужденной составляющей искомой величины (в данном случае  $u_C$ ). Если ЭДС источников постоянны или являются синусоидальными функциями времени, то принужденная составляющая ( $u_{C\text{пр}}$ ) равна установившемуся значению определяемой величины ( $u_{C.y}$ ). Общее решение однородного дифференциального уравнения называют свободной составляющей искомой величины ( $u_{C.cв}$ ).

Таким образом  $u_C = u_{C.cв} + u_{C.y}$ .

Аналогично  $i_A = i_C = i_{A.cв} + i_{A.y}$ .

2). Определяем установившееся значение напряжения на емкости  $u_{C.y}$ .

Так как в установившемся режиме напряжения на элементах и токи цепи синусоидальны, расчет  $u_{C.y}$  выполним комплексным методом.

$$\underline{I}_{Ay} = \underline{I}_{Cy} = \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_C}{\underline{Z}_y}$$

Сопротивление цепи (Ом)

$$\begin{aligned} \underline{Z}_y &= R_A + R_C + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 30 + j\left(314 \cdot 0,2 - \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\right) = \\ &= 30 + j(62,8 - 31,85) = 30 + j30,95 = 43,1e^{j45,89^\circ}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_A - \underline{E}_C &= 220e^{j30^\circ} - 220e^{j150^\circ} = 220(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ - \cos 150^\circ - j \sin 150^\circ) = \\ &= 220(0,866 + 0,5j + 0,866 - j0,5) = 381,05B \end{aligned}$$

$$\underline{I}_{Cy} = \underline{I}_{Ay} = \frac{381,05}{43,1e^{j45,89^\circ}} = 8,84e^{-j45,89^\circ} A.$$

Установившиеся токи:  $i_{Ay} = i_{Cy} = \sqrt{2} \cdot 8,84 \sin(314t - 45,89^\circ) A$ .

Комплексное напряжение на емкости:

$$\underline{U}_{Cy} = \underline{I}_{Cy} \cdot \left(-j \frac{1}{\omega C}\right) = 8,84e^{-j45,89^\circ} (-j31,85) = 281,6e^{-j135,89^\circ} B$$

Установившееся напряжение на емкости:

$$u_{Cy} = \sqrt{2} \cdot 281,6 \sin(314t - 135,89^\circ) B.$$

3). Определяем свободные составляющие токов и напряжения на емкости. Однородное дифференциальное уравнение (3) решается с помощью характеристического уравнения. Характеристическое уравнение составляется путем замены  $\frac{d^2 u_C}{dt^2}$  на  $P^2$ ,  $\frac{du_C}{dt}$  — на  $P$ ,  $u_C$  — на единицу. В итоге получим:

$$LCP^2 + C(R_A + R_C)P + I = 0. \quad (4)$$

Сокращая уравнение (4) на  $LC$ , запишем:

$$P^2 + \frac{R_A + R_C}{L}P + \frac{1}{LC} = 0.$$

Корни характеристического уравнения (4):

$$P_{1,2} = -\frac{R_A + R_C}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R_A + R_C}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (5)$$

Подставив значения  $R_A$ ,  $R_C$ ,  $L$ ,  $C$  в формулу (5), получим:

$$P_{1,2} = -75 \pm \sqrt{5625 - 50000} = -75 \pm j210,65 = -d \pm jw .$$

Так как корни  $P_1$  и  $P_2$  — комплексные сопряженные, значения свободных токов и напряжение на емкости запишем в виде:

$$u_C = B_1 e^{-dt} \sin(\omega t + l_1); \quad (6)$$

$$i_A = i_C = B_2 e^{-dt} \sin(\omega t + l_2). \quad (7)$$

Определяем постоянные интегрирования  $B_1, l_1, B_2, l_2$ . Для этого запишем уравнения (6) и (7) при  $t = 0$ :

$$u_C(0) = B_1 \sin l_1; \quad (8)$$

$$i_A(0) = i_C(0) = B_2 \sin l_2. \quad (9)$$

Так как неизвестных в уравнениях (8) и (9) больше двух, дифференцируем уравнения (6) и (7) и записываем полученные уравнения при  $t = 0$ .

$$\frac{du_C}{dt} = B_1(-d)e^{-dt} \sin(\omega t + l_1) + B_1 \omega e^{-dt} \cos(\omega t + l_1); \quad (10)$$

$$\frac{di_C}{dt} = B_2(-d)e^{-dt} \sin(\omega t + l_2) + B_2 \omega e^{-dt} \cos(\omega t + l_2);$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = B_1(-d) \sin l_1 + B_1 \omega \cos l_1;$$

$$\left. \frac{di_C}{dt} \right|_{t=0} = B_2(-d) \sin l_2 + B_2 \omega \cos l_2. \quad (11)$$

В итоге постоянные интегрирования определяются путем решения уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_C(0) &= B_1 \sin l_1, \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} &= B_1(-d) \sin l_1 + B_1 \omega \cos l_1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} i_C(0) &= B_2 \sin l_2, \\ \left. \frac{di_C}{dt} \right|_{t=0} &= B_2(-d) \sin l_2 + B_2 \omega \cos l_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

При этом значения величин в левых частях уравнений должны быть предварительно рассчитаны.

В момент коммутации ( $t = 0$ ) справедливы следующие выражения:

$$u_{C_{св}} = u_C(0) - u_{C_Y}(0); \quad i_{C_{св}} = i_C(0) - i_{C_Y}(0);$$

$$u_{C_Y}(0) = \sqrt{2} \cdot 281,6 \cdot \sin(-135,39^\circ) = -277,19 \text{ В};$$

$$i_{C_Y}(0) = i_{A_Y}(0) = \sqrt{2} \cdot 8,84 \sin(-45,39^\circ) = 8,98 \text{ А}.$$

Независимые начальные условия ( $u_C(0)$  и  $i_C(0)$ ) определяются по законам коммутации:

по первому закону коммутации  $i_C(0) = i_C(0-)$ , где  $i_C(0-)$  - значение тока фазы  $C$  непосредственно до коммутации; по второму закону коммутации  $u_C(0) = u_C(0-)$ , где  $u_C(0-)$  — значение напряжения на емкости непосредственно до коммутации.

Из уравнения (1) при  $t=0$  определяем значение напряжения на индуктивности:  $u_L(0) = L \left. \frac{di_C}{dt} \right|_{t=0} = e_A(0) - e_C(0) - i_C(0)(R_A + R_C) - u_C(0)$ .

$$\text{Тогда производная тока } i_C \left. \frac{di_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{e_A(0) - e_C(0) - i_C(0)(R_A + R_C) - u_C(0)}{L}.$$

4). Определяем напряжение на емкости и ток фазы С непосредственно до коммутации. Для этого в начале определяем мгновенные значения тока фазы С и напряжения на емкости до коммутации.

Так как до коммутации токи цепи и напряжения были синусоидальными, расчет проводим комплексным методом.

$$\underline{U}_{An} = \frac{\underline{U}_{AB} \underline{Y}_B - \underline{U}_{CA} \underline{Y}_C}{\underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_A}, \text{ где } \underline{U}_{AB} = \sqrt{3} \underline{E}_A e^{j30^\circ} = 381,05 e^{j60^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{AB} \cdot a = 381,05 e^{j60^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 381,05 e^{j180^\circ} \text{ В}.$$

Проводимости ветвей:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{R_A - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{10 - j31,85} = \frac{1}{33,38 e^{-j72,57^\circ}} = 0,03 e^{j72,57^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{R_B} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ См}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{20 + j62,8} = \frac{1}{65,91 e^{j72,33^\circ}} = 0,0152 e^{-j72,33^\circ} \text{ См}.$$

$$\underline{U}_{An} = \frac{381,05 e^{j60^\circ} \cdot 0,05 - 381,05 e^{j180^\circ} \cdot 0,0152 e^{-j72,33^\circ}}{0,03 e^{j72,57^\circ} + 0,05 + 0,0152 e^{-j72,33^\circ}} = \frac{11,29 + j10,98}{0,0621 + j0,0146} = \frac{15,75 e^{j44,2^\circ}}{0,0638 e^{j13,23^\circ}} = 246,86 e^{j30,96^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{An}}{\underline{Z}_A} = \frac{246,86 e^{j30,96^\circ}}{33,38 e^{-j72,57^\circ}} = 7,4 e^{j103,53^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{U}_C = \underline{I}_A \cdot \left( -j \frac{1}{\omega C} \right) = 7,4 e^{j103,53^\circ} \cdot 31,85 e^{-j90^\circ} = 235,69 e^{j13,53^\circ} \text{ В}.$$

Мгновенное значение напряжения на емкости до коммутации:

$$u_{C \text{ д.к.}} = \sqrt{2} \cdot 235,69 \cdot \sin(314t + 13,53^\circ) \text{ В};$$

$$u_C(0-) = \sqrt{2} \cdot 235,69 \sin 13,53^\circ = 77,98 \text{ В}.$$

$$\underline{U}_{Cn} = \frac{\underline{U}_{CA} \cdot \underline{Y}_A - \underline{U}_{BC} \cdot \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{381,05 e^{j180^\circ} \cdot 0,03 e^{j72,57^\circ} - 381,05 e^{-j60^\circ} \cdot 0,05}{0,0621 + j0,0146} = \frac{-12,92 + j5,5}{0,0621 + j0,0146} = \frac{14,04 e^{j156,9^\circ}}{0,0638 e^{j13,23^\circ}} = 220,06 e^{j143,67^\circ} \text{ В}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{nC}}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{U}_{Cn} \cdot e^{-j180^\circ}}{\underline{Z}_C} = \frac{220,06 e^{j143,67^\circ} \cdot e^{-j180^\circ}}{65,91 e^{j72,33^\circ}} = 3,34 e^{-j108,66^\circ} \text{ А}.$$

Мгновенное значение тока фазы С до коммутации:

$$i_{C \text{ д.к.}} = \sqrt{2} \cdot 3,34 \sin(314t - 108,66^\circ) \text{ А}.$$

Ток фазы С непосредственно до коммутации:

$$i_C(0-) = \sqrt{2} \cdot 3,34 \cdot \sin(-108,66^\circ) = -4,48 \text{ А}.$$

5). Определяем значения свободных составляющих напряжения на емкости и тока фазы С и производных этих величин в момент коммутации.

Напряжение и ток в момент коммутации:

$$u_C(0) = u_C(0-) = 77,98 \text{ В}; i_C(0) = i_C(0-) = -4,48 \text{ А.}$$

Свободные составляющие напряжения и тока:

$$u_{C_{св.}}(0) = u_C(0) - u_{C_y}(0) = 77,98 - (-277,19) = 355,17 \text{ В},$$

$$i_{C_{св.}}(0) = i_C(0) - i_{C_y}(0) = -4,48 - (-8,98) = 4,5 \text{ А.}$$

Производная тока в момент коммутации:

$$\left. \frac{di_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\sqrt{2} \cdot 220(\sin 30^\circ - \sin 150^\circ) + 4,48 \cdot 30 - 77,98}{0,2} = 282,1$$

Производная свободной составляющей тока  $i_C$  в момент коммутации:

$$\left. \frac{di_{C_{св.}}}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_C}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_{C_y}}{dt} \right|_{t=0};$$

$$\frac{di_{C_y}}{dt} = \sqrt{2} \cdot 8,84 \cos(314t - 45,89^\circ) \cdot 314;$$

$$\left. \frac{di_{C_y}}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{2} \cdot 8,84 \cos 45,89^\circ \cdot 314 = 2732,31;$$

$$\left. \frac{di_{C_{св.}}}{dt} \right|_{t=0} = 282,1 - 2732,31 = -2450,21.$$

Производная свободной составляющей напряжения на емкости в момент коммутации:

$$\left. \frac{du_{C_{св.}}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{C} i_{C_{св.}}(0) = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} \cdot 4,5 = 45000.$$

б). Определяем постоянные интегрирования.

Подставив в уравнения (12), (13) найденные значения свободных составляющих напряжения на емкости, тока фазы  $C$  и производных этих величин, получим:

$$355,17 = B_1 \sin l_1,$$

$$45000 = B_1(-d) \sin l_1 + B_1 \omega_{св} \cos l_1;$$

$$4,5 = B_2 \sin l_2,$$

$$-2450,21 = B_2(-d) \sin l_2 + B_2 \omega_{св} \cos l_2.$$

$$\text{Далее: } \sin l_1 = \frac{355,17}{B_1}; \quad 45000 = B_1(-75) \cdot \frac{355,17}{B_1} + B_1 \cdot 210,65 \cos l_1;$$

$$\cos l_1 = \frac{45000 + 75 \cdot 355,17}{B_1 \cdot 210,65} = \frac{340,08}{B_1}; \quad \operatorname{tg} l_1 = \frac{355,17}{340,08} = 1,044, \quad l_1 = 46,23^\circ; \quad B_1 = 491,84.$$

Рассчитывая аналогично  $B_2$  и  $l_2$ , получим:

$$l_2 = 155,84^\circ; \quad B_2 = 11.$$

7). Переходные напряжение на емкости и ток фазы  $C$ :

$$u_C = 491,84 e^{-75t} \cdot \sin(210,65t + 46,23^\circ) + \sqrt{2} \cdot 281,6 \sin(314t - 135,89^\circ) \text{ В};$$

$$i_C = 11 e^{-75t} \sin(210,65t + 155,84^\circ) + \sqrt{2} \cdot 8,84 \sin(314t - 45,89^\circ) \text{ А.}$$

Расчет цепи операторным методом

Расчет переходных процессов операторным методом основан на представлении непрерывных или кусочно-непрерывных функций времени, имеющих ограниченный порядок возрастания и обращаемых в нуль при  $t < 0$ , функциями комплексного переменного  $P=S+jW$ . Связь между функцией времени  $f(t)$ , называемой оригиналом, и соответствующей ей функцией комплексного переменного  $F(P)$ , называемой операторным изображением функции времени, записывается так:  $f(t) = F(P)$ .

Переход от оригинала к изображению функции времени осуществляется с помощью прямого преобразования Лапласа:

$$F(P) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt.$$

Операторное изображение, например, постоянной  $A$ , т. е.

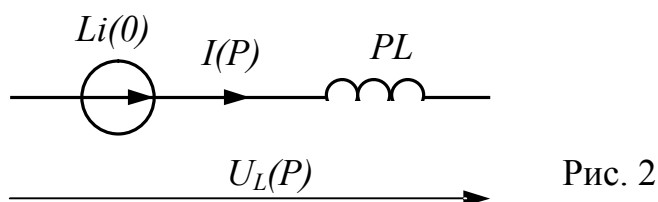
$$A(P) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-pt} \cdot dt = -\frac{A}{P} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{P}.$$

Операторное изображение напряжения на индуктивности

$$U_L(P) = \int_0^{\infty} L \frac{di}{dt} \cdot e^{-pt} \cdot dt = PLI(P) - Li(0), \quad (1)$$

где  $I(P)$  - операторное изображение тока,  $i(0)$  - ток в ветви с индуктивностью в момент коммутации.

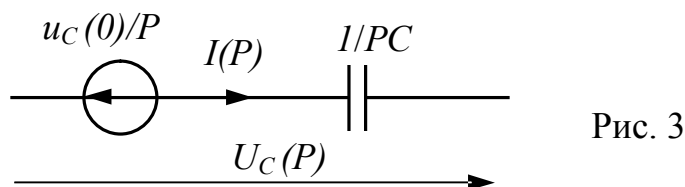
Уравнению (1) соответствует операторная схема замещения индуктивности (рис.2)



Операторное изображение напряжения на емкости:

$$U_C(P) = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{C} \cdot \int_0^t idt + U_C(0) \right) e^{-pt} dt = \frac{1}{PC} I(P) + \frac{U_C(0)}{P}. \quad (2)$$

Уравнению (2) соответствует операторная схема замещения емкости (рис.3.)



Представление токов и напряжений на элементах цепи их операторными изображениями позволяет свести систему дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в этой цепи, к системе алгебраических уравнений, решение которых значительно проще.

Переход от изображений напряжений и токов к оригиналам осуществляется с помощью обратного преобразования Лапласа  $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(P)e^{pt} dp$ , а также по формулам соответствия функций комплексного переменного функциям времени, приводимым в математических справочниках.

В случаях, когда изображение представляет собой рациональную дробь вида:

$$\frac{M(P)}{N(P)} = \frac{a_0 P^m + a_1 P^{m-1} + \dots + a_m}{B_0 P^n + b_1 P^{n-1} + \dots + b_n},$$

у которой  $m < n$ , а полином  $N(P)=0$  не имеет кратных корней, переход от изображения к оригиналу осуществляется по формуле:

$$\frac{M(P)}{N(P)} = f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{M(P_k)}{N'(P_k)} \cdot e^{P_k t},$$
 называемой теоремой разложения, где  $P_k$ - корни уравнения  $N(P) = 0$ .

ни уравнения  $N(P) = 0$ .

При расчете переходных процессов операторным методом оригиналы токов и напряжений цепи сразу выражаются суммами установившихся и свободных токов и напряжений.

Расчет можно упростить, если установившиеся составляющие токов и напряжений определять методами расчета цепей постоянного или синусоидального тока (если ЭДС источников или постоянны или синусоидальны), а операторным методом рассчитывать только свободные составляющие токов и напряжений.

В качестве примера такого подхода к расчету переходных процессов определим свободный ток фазы  $C$  в приведенной на рис.1 трехфазной цепи, считая, что установившийся ток  $i_{Cy}$ , а также  $u_C(0)$  и  $i_C(0)$  рассчитаны в предыдущем примере.

Расчет проводим в следующей последовательности.

1). Составляем операторную схему замещения цепи после коммутации (рис. 4). Важно отметить, что эдс  $e_A$  и  $e_C$  в схеме не должно быть.

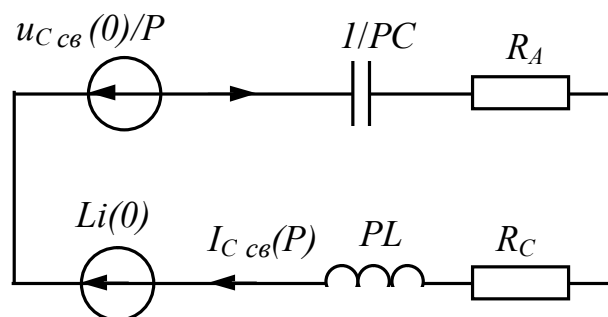


Рис. 4.

По закону Ома в операторной форме

$$I_{C_{св.}}(P) = 2 \frac{Li_{C_{св.}}(0) - \frac{u_{C_{св.}}(0)}{P}}{R_A + R_C + PL + \frac{1}{PC}} = \frac{C(PLi_{C_{св.}}(0) - u_{C_{св.}}(0))}{P^2 LC + (R_A + R_C)CP + 1}$$

Подставив значение заданных  $R_a$ ,  $R_c$ ,  $L$ ,  $C$ , а также найденных в предыдущем примере значений  $i_{C_{св.}}(0)$ ,  $U_{C_{св.}}(0)$ , получим:

$$I_{cc.}(P) = \frac{100 \cdot 10^{-6}(P \cdot 0,2 \cdot 4,5 - 355,17)}{P^2 \cdot 0,2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} + 30 \cdot 100 \cdot 10^{-6} + 1} = \frac{9 \cdot 10^{-5} \cdot P - 3,552 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-5} \cdot P^2 + 3 \cdot 10^{-3} P + 1} = \frac{M(P)}{N(P)}$$

2. Переходим от изображения свободного тока фазы  $C$  к оригиналу.

Переход к оригиналу осуществляем по теореме разложения:

$$i_{cc.} = \sum_{k=1}^n \frac{M_1(P_k)}{N_1'(P_k)} \cdot e^{P_k t}$$

Корни уравнения  $N(P) = P^2 LC + (R_a + R_c)CP + 1 = 0$  по предыдущему примеру равны:  $P_{1,2} = -75 \pm j210,65$ .

$$\text{Производная } N_1(P) = 4 \cdot 10^{-5} \cdot P + 3 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{По теореме разложения } i_{C_{св.}} = ((M(P_1)/N'(P_1)) \cdot e^{P_1 t} + ((M(P_2)/N'(P_2)) \cdot e^{P_2 t}.$$

При сопряженных комплексных корнях уравнения  $N(P) = 0$  достаточно вычислить первое слагаемое суммы только для корня  $P_1$ , а для корня  $P_2$  взять значение, сопряженное первому слагаемому. Так как мнимые части двух слагаемых сокращаются, значение свободной составляющей тока фазы  $C$  будет равно:

$$\begin{aligned} i_{C_{св.}} &= 2 \operatorname{Re} [ ((M(P_1)/N'(P_1)) \cdot e^{P_1 t} ] = \\ &= 2 \operatorname{Re} [ (9 \cdot 10^{-5} \cdot (-75 + j210,65) - 3,552) / (4 \cdot 10^{-5}(-75 + j210,65) + 3 \cdot 10^{-3}) ] \cdot e^{(-75 + j210,65)t} = \\ &= 2 \operatorname{Re} (5,51 \cdot e^{j65,89^\circ} \cdot e^{(-75 + j210,65)t}) = 11,01 \cdot e^{-j75^\circ} \cdot \cos(210,65t + 65,89^\circ). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } i_{C_{св.}} = 11,01 e^{-75t} \cdot \sin(210,65t + 155,89^\circ) \text{ A.}$$