ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

«ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ»

1. ЗАДАНИЕ

ЭДС источников напряжения и токи источников тока изменяются гармонически с угловой частотой ω = 1000 рад/с, имея амплитуды соответственно E =100 В и Jm=10 А.

В заданный момент времени происходит коммутация – включение или отключение участка схемы, указанная на схеме стрелкой. До коммутации режим цепей установившийся.

Для возникшего переходного процесса требуется:

1. Определить классическим методом ток в одной из ветвей схемы, не содержащей индуктивности и источника энергии.

2. Определить тот же ток, что и в п.1, проводя расчет его свободной составляющей операторным методом.

3. Построить кривую найденной зависимости i(t), причем масштаб времени следует выбрать так, чтобы изменение свободной составляющей тока было видно на протяжении достаточно большого отрезка оси абсцисс.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

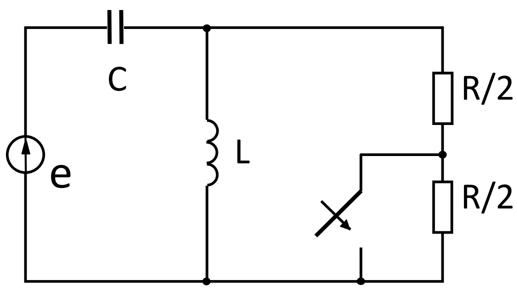
1. Коммутация в схеме происходит в момент времени, когда ЭДС или ток источника имеет заданное мгновенное значение ($e(0) = k \cdot Em$ или $j(0) = k \cdot Jm$) и заданный знак скорости изменения. Коэффициент k и знак скорости изменения задается для каждой схемы.

2. Номер схемы соответствует порядковому номеру, под которым фамилия студента записана в групповом журнале.

3. Числовые данные параметров схемы приведены в таблице и выбираются в соответствии с номером группы и буквенного индекса (вариант А, Б или В), указанного на каждой схеме.

2. ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СХЕМ

№ группы	Вариант	R, Ом	L, Гн	C, Ф
10	B	20	$8 \cdot 10^{-2}$	10^{-4}



$k = \sqrt{3}/2$; $de/dt < 0$

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТА

В качестве примера рассчитаем ток $i_1(t)$ в ветви, не содержащей ЭДС и элемент L в схеме, изображенной на рис. 1.

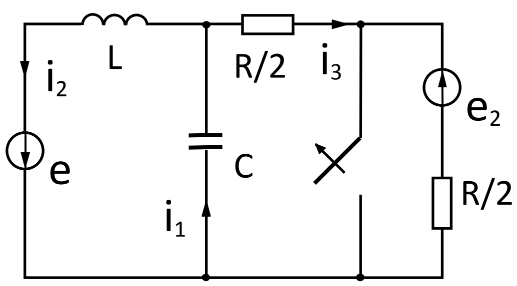


Рис. 1

Параметры схемы:

$\omega = 1000$ рад/с,

$E_m = 100$ В

$R = 10$ Ом, $L = 2 \cdot 10^{-2}$ Гн,

$C = 1/9 \cdot 10^{-3}$ Ф,

$e_1 = e_2$,

k = 1/2, de/dt < 0

Определим начальную фазу ЭДС $e_1(t) = e_2(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$

В момент коммутации t=0:

$$e_1(0) = e_2(0) = E_m \sin\psi_e = k\,E_m = {}^1\!/_2 \cdot 100 = 50\ \text{В}$$

$$\frac{de_1(0)}{dt} = \frac{de_2(0)}{dt} = \omega E_m \cos\psi_e = 1000 \cdot 100 \cos\psi_e < 0\,.$$

Следовательно, $\sin\psi_e = k = {}^1\!/_2$,

$\cos\psi_e < 0$, откуда находим значение $\psi_e = 150^{o}$.

Таким образом, $e_1(t) = e_2(t) = 100 \sin(1000t + 150^{o})$ В.

1. Классический метод расчета

В схеме до коммутации рассчитываем те величины, которые подчиняются законам коммутации: напряжение на емкости и ток в ветви с индуктивностью при t =(0-). Схема до коммутации и направления токов в ветвях указаны на рис. 2.

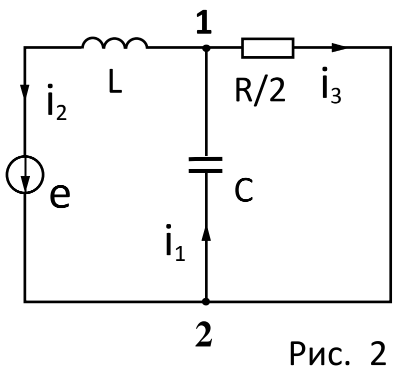


Рис. 2

Применим комплексный метод расчета, так как в цепи установившийся режим. Найдем комплексные сопротивления и проводимости:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-3}} = 9\ \text{Ом},$$

$$X_L = \omega L = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 20\ \text{Ом}\,.$$

Запишем амплитудное комплексное значение ЭДС

$\dot{E}_{m_1} = 100e^{j150^o} = -86{,}6 + j50$ В.

Используем метод узловых потенциалов. Потенциал узла **2** примем нулевым:

$\varphi_{m_1} = 0$. Найдем амплитудное комплексное значение потенциала узла **1**:

$\varphi_{m_1} = \dfrac{-\dot{E}_{m_1}\underline{Y}_L}{\underline{Y}_C + \underline{Y}_L + \underline{Y}_R}$, где $\underline{Y}_R = \dfrac{1}{R/2} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ См ,

$\underline{Y}_L = \dfrac{1}{jX_L} = \dfrac{1}{j20} = -j0{,}05$ См, $\underline{Y}_C = \dfrac{1}{-jX_C} = \dfrac{1}{-j9} = j0{,}11$ См. Подставив численные значения в выражение φ_{m_1}, получим:

$$\varphi_{m_1} = \frac{-(-86{,}6 + j50)(-j0{,}05)}{j0{,}11 - j0{,}05 + 0{,}2} = -17{,}43 - j16{,}4 = 23{,}94\,e^{-j136{,}7^o}\ \text{В}.$$

Определим комплексную амплитуду напряжения на емкости $\dot{U}_{m_C}$:

$\dot{U}_{m_C} = \varphi_{m_2} - \varphi_{m_1} = -23{,}94e^{-136{,}7^o} = 23{,}94e^{j43{,}3^o}$ В; откуда

$u_C(t) = U_{m_C}\sin(\omega t + \psi_{U_C}) = 23{,}94\sin(1000t + 43{,}3^o)$ В. Напряжение на емкости в момент коммутации t = (0-) равно:

$u_C(0-) = 23{,}94\sin 43{,}3^o = 16{,}42$ В.

Определим комплексную амплитуду тока в ветви с индуктивностью $\dot{I}_{m2}$: $\varphi_{m_1} - \varphi_{m_2} = jX_L\dot{I}_{m_2}$,

$$\dot{I}_{m_2} = \frac{\varphi_{m_1} + \dot{E}_{m_1}}{jX_L} = \frac{-17{,}43 - j16{,}4 - 86{,}6 + j50}{j20} = 1{,}68 + j5{,}2 = 5{,}46\,e^{j72^o}\ \text{А}.$$

Мгновенное значение тока $i_2(t)$ имеет вид:

$i_2(t) = I_{m_2} \sin(\omega t + \psi_{i_2}) = 5{,}46 \sin(1000t + 72^{\circ})$ A. Ток в ветви с индуктивностью в момент коммутации t =(0-) равен: $i_2(0-) = 5{,}46 \sin 72^{\circ} = 5{,}2$ A.

Схема после коммутации изображена на рис. 3. Направления токов и параметры ветвей с токами i_1 и i_2 такие, как в схеме до коммутации (рис. 2). В ветви с током i_3 добавилось сопротивление R/2 и ЭДС e_2. Искомый ток $i_1(t)$ ищем в виде суммы принужденного и свободного тока:

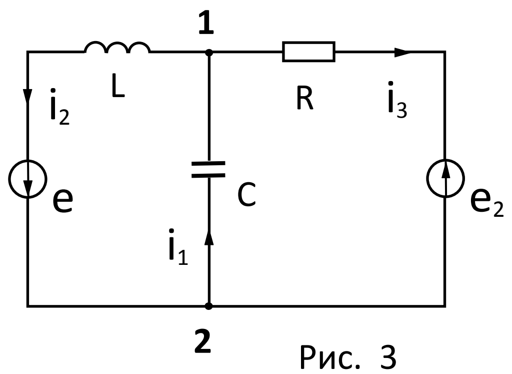


Рис. 3

$$i_1(t) = i_{1пр}(t) + i_{1св}(t)$$

Определение принужденного тока $\mathbf{i_{1пр}(t)}$

Применим комплексный метод расчета, так как в схеме установившийся (принужденный) режим. Используем метод узловых потенциалов. Примем $\varphi_{m_2} = 0$, уравнение для определения φ_{m_1} имеет вид:

$$\varphi_{m_1} = \frac{-\dot{E}_{m_1} \underline{Y}_L + \dot{E}_{m_2} \underline{Y}_R}{\underline{Y}_C + \underline{Y}_L + \underline{Y}_R},$$

где $\dot{E}_{m_1} = \dot{E}_{m_2} = 100 e^{j150^{\circ}} = -86{,}6 + j50$ В,

$\underline{Y}_L = -j0{,}05$ См, $\underline{Y}_R = 0{,}1$ См, $\underline{Y}_C = j0{,}11$ См.

Значение φ_{m_1} равно:

$$\dot{\varphi}_{m_1} = \frac{-(-86{,}6 + j50)(-j\,0{,}05) + (-86{,}6 + j\,50)\cdot 0{,}1}{j0{,}11 - j\,0{,}05 + 0{,}1} =$$
$$= -78{,}53 + j54{,}12 = 95{,}37e^{j\,145{,}4^o}\ B.$$

$\varphi_{m_1} = -(-jX_C)\dot{I}_{m_1\text{пр}}$, откуда

$$\dot{I}_{m_1\text{пр}} = \frac{-\varphi_{m_1}}{-jX_C} = \frac{78{,}53 - j\,54{,}12}{-j\,9} = 6 + j\,8{,}7 = 10{,}6e^{j\,55{,}4^o}\ \text{A}\ ;$$

$$i_{1\text{пр}}(t) = I_{m_1\text{пр}}\sin(\omega t + \psi_{i_1\text{пр}}) = 10{,}6\sin(1000t + 55{,}4^o)\ \text{A}.$$

Определим принужденные значения напряжения на емкости и тока в ветви с индуктивностью при t = 0, которые будут использованы при расчете операторным методом (смотри п.2 содержания работы).

$$\dot{U}_{m_C} = -\varphi_{m_1} = -95{,}37e^{j145{,}4^o} = 95{,}37e^{-j\,34{,}6^o}\ \text{B},$$

$$u_{C\text{пр}}(t) = U_{m_C}\sin(\omega t + \psi_{u_C}) = 95{,}37\sin(1000t - 34{,}6)\ \text{B}$$

$$u_{C\text{пр}}(0) = 95{,}37\sin(-34{,}6) = -54\ \text{B}.$$

Принужденный ток в ветви с индуктивностью $i_{2\text{пр}}(0)$ определим по формулам:

$$\varphi_{m_1} - \varphi_{m_2} = jX_L\dot{I}_{m_2\text{пр}} - \dot{E}_{m_1} \quad ,$$

$$\dot{I}_{m_2\text{пр}} = \frac{\varphi_{m_1} + \dot{E}_{m_1}}{jX_L} = \frac{-78{,}53 + j54{,}12 - 86{,}6 + j50}{j20} = 5{,}21 + j8{,}26 = 9{,}7e^{j57{,}8^o}\ \text{A},$$

$$i_{2\text{пр}}(t) = I_{m_2\text{пр}}\sin(\omega\,t + \psi_{i_2\text{пр}}) = 9{,}76\sin(1000t + 57{,}8^o)\ \text{A},$$

$$i_{2\text{пр}}(0) = 9{,}76\sin 57{,}8^o = 8{,}26\ \text{A}.$$

Определение свободного тока $i_{1\text{св}}$

Вид свободной составляющей тока зависит от вида корней характеристического уравнения, которые определим методом входного операторного сопротивления. Схема для определения Z(p) имеет вид (рис. 4) Запишем выражение для операторного сопротивления относительно точек разрыва ветви с искомым током и приравняем его нулю. Получим равенство

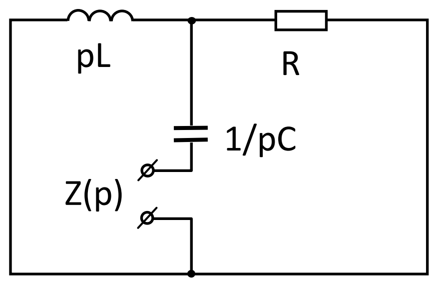


Рис. 4

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + \frac{pLR}{pL + R} = 0$$

После преобразования получим характеристическое уравнение: $p^2 + p\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} = 0$. Подставим численные значения: $p^2 + 900p + 4{,}5 \cdot 10^5 = 0$, получим $p_{1,2} = -450 \pm j497{,}5$. Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные, следовательно, выражение для свободной составляющей тока имеет вид: $i_{1св}(t) = Ae^{-450t}\sin(497{,}5t + x)$, где A и x – постоянные интегрирования.

Общее решение имеет вид:

$$i_1(t) = i_{1пр}(t) + i_{1св}(t) = 10{,}6\sin(1000t + 55{,}4^{\text{o}}) + A\,e^{-450t}\sin(497{,}5t + x)\ \text{A}.$$

Определим постоянные интегрирования A и x, для чего найдем значения $i_1(0)$ и $\frac{di_1(0)}{dt}$. Продифференцируем выражение $i_1(t)$:

$$\frac{di_1(t)}{dt} = 10600\cos(10^3 t + 55{,}4^{O}) - 450Ae^{-450\,t}\sin(497{,}5t + x) + 497{,}5Ae^{-450\,t}\cos(497{,}5t + x$$

Подставим t = 0 в выражения для $i_1(t)$ и $\frac{di_1(t)}{dt}$: $i_1(0) = 8{,}73 + A\sin x$,

$$\frac{di_1(0)}{dt} = 0{,}6 \cdot 10^4 - 450\sin x + 497{,}5\,A\cos\,x\,.$$

Для определения $i_1(0)$ и $\frac{di_1(0)}{dt}$ составим уравнения по законам Кирхгофа для схемы после коммутации и продифференцируем (1) и (2) :

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)\ , \qquad (1)$$

$$\frac{1}{C}\int i_1(t)\,dt + R\,i_3(t) = -e_2(t)\ , \qquad (2)$$

$$L\frac{di_2(t)}{dt} - Ri_3(t) = e_1(t) + e_2(t)\ , \qquad (3)$$

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{di_3(t)}{dt}\ , \qquad (4)$$

$$\frac{i_1(t)}{C} + R\,\frac{di_3(t)}{dt} = -\frac{de_2(t)}{dt}\ , \qquad (5)$$

где $\frac{de_2(t)}{dt} = \omega E_{m_2}\cos(\omega t + 150^{O}) = 10^5\cos(1000t + 150^{O})$, а

$$\frac{de_2(0)}{dt} = -8{,}7 \cdot 10^4\,.$$

Запишем уравнения (1) – (5) при t = 0. Учтем , что $\frac{1}{C}\int i_1(t)dt = u_C(t)$:

$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0)\ , \qquad (1)$$

$$u_C(0) + Ri_3(0) = -e_2(0)\ , \qquad (2)$$

$$L\frac{di_2(0)}{dt} - Ri_3(0) = e_1(0) + e_2(0)\ , \qquad (3)$$

$$\frac{di_1(0)}{dt} = \frac{di_2(0)}{dt} + \frac{di_3(0)}{dt}\ , \qquad (4)$$

$$\frac{i_1(0)}{C} + R\frac{di_3(0)}{dt} = -\frac{de_2(0)}{dt}\ . \qquad (5)$$

Подставив в уравнения (1) – (5) численные значения параметров схемы R, L, C, вычисленные значения $e_1(0) = e_2(0) = 50$, $\frac{de_2(0)}{dt} = -8{,}7 \cdot 10^4$ и определенные по законам коммутации значения $i_2(0) = i_2(0\text{-}) = 5{,}2$ А, $u_C(0) = u_C(0\text{-}) = 16{,}42$ В, получим: $i_1(0) = 5{,}2 + i_3(0)$,

$$16{,}42 + 10i_3(0) = -50\ ,$$

$$2 \cdot 10^{-2}\frac{di_2(0)}{dt} - 10i_3(0) = 100\ ,$$

$$\frac{di_1(0)}{dt} = \frac{di_2(0)}{dt} + \frac{di_3(0)}{dt}\ ,$$

$$\frac{i_1(0)}{\frac{1}{9}10^{-3}} + 10\frac{di_3(0)}{dt} = 8{,}7 \cdot 10^4\ .$$

Разрешим полученную систему уравнений относительно $i_1(0)$ и $\frac{di_1(0)}{dt}$:

$$i_1(0) = -1{,}44\,, \qquad \frac{di_1(0)}{dt} = 1{,}17 \cdot 10^4\,.$$

Таким образом, постоянные интегрирования находим из уравнений:

$$i_1(0) = 8{,}73 + A\sin x = -1{,}44\,,$$

$$\frac{di_1(0)}{dt} = 0{,}6 \cdot 10^4 - 450A\sin x + 497{,}5A\cos x = 1{,}17 \cdot 10^4$$ или

$A\sin x = -10{,}2$,

$A\cos x = 2{,}01$, откуда $A = \sqrt{10{,}2^2 + 2{,}01^2 = 10{,}36}$, $x = \mathrm{arctg}\dfrac{-10{,}2}{2{,}01} = -78{,}8^{O}$.

Свободная составляющая искомого тока имеет вид:

$$i_{1св}(t) = Ae^{-450t}\sin(497{,}5t + x) = 10{,}36e^{-450t}\sin(497{,}5t - 78{,}8^{\circ}).$$

Итак, искомый ток $i_1(t)$ равен:

$$i_1(t) = i_{1ПР}(t) + i_{1СВ}(t) = 10{,}6\sin(1000t + 55{,}4^{O}) + 10{,}36e^{-450t}\sin(497{,}5t - 78{,}8^{O})\ \text{А}.$$

2. Операторный метод определения свободной составляющей тока

Составим операторную схему для определения $i_{1св}(t)$ (рис. 5).

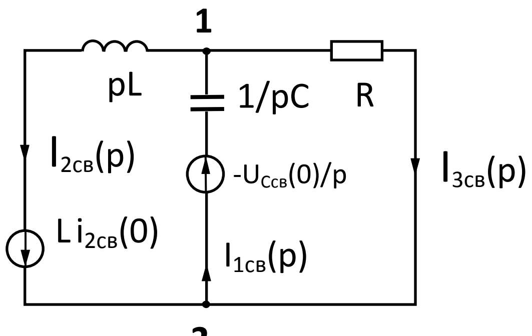


Рис. 5

Определим, значения $u_{Cсв}(0)$ и $i_{2св}(0)$ из выражений:

$$u_C(0) = u_{Cпр}(0) + u_{Cсв}(0)$$

$i_2(0) = i_{2пр}(0) + i_{2св}(0)$, где значения $u_C(0)$, $i_2(0)$ известны из законов коммутации:

($u_C(0) = u_C(0-) = 16{,}42$ В, $i_2(0) = i_2(0-) = 5{,}2$ А), а $u_{Cпр}(0)$ и $i_{2пр}(0)$ рассчитаны в п. 1 ($u_{Cпр}(0) = -54$ В, $i_{2пр}(0) = 8{,}26$ А). Тогда

$$u_{Cсв}(0) = u_C(0) - u_{C_{Cпр}}(0) = 16{,}42 + 54 = 70{,}42\ \text{В},$$

$$i_{2св}(0) = i_2(0) - i_{2пр}(0) = 5{,}2 - 8{,}26 = -3{,}06 \text{ А}.$$

Изображение искомого свободного тока $I_{1св}(p)$ получим, применив метод узловых потенциалов. Изображение потенциала узла **2** примем нулевым. Найдем изображение свободной составляющей потенциала узла **1**:

$$\varphi_{1св}(p) = \frac{-\dfrac{u_{C\,св}(0)}{p\;{}^{1}\!/_{pC}} - \dfrac{Li_{2св}(0)}{pL}}{\dfrac{1}{{}^{1}\!/_{pC}} + \dfrac{1}{pL} + \dfrac{1}{R}}.$$

Подставив известные числовые данные, получим:

$$\varphi_{1св}(p) = \frac{-\dfrac{70{,}42\,p\;{}^{1}\!/_{9}10^{-3}}{p} - \dfrac{2\cdot10^{-2}(-3{,}6)}{p\cdot2\cdot10^{-2}}}{p\;{}^{1}\!/_{9}10^{-3} + \dfrac{1}{p\cdot2\cdot10^{-2}} + \dfrac{1}{10}} = \frac{-70{,}42p + 27{,}5\cdot10^{3}}{p^2 + 900p + 4{,}5\cdot10^{5}}.$$

Изображение свободного тока $I_{1св}(p)$ найдем из уравнения:

$$\varphi_{1св}(p) - \varphi_{2св}(p) = -I_{1св}(p)\;{}^{1}\!/_{pC} - \frac{u_{C\,св}(0)}{p},$$ откуда

$$I_{1св}(p) = \frac{-\varphi_{1св}(p) - {}^{u_{C\,св}(0)}\!/_{p}}{{}^{1}\!/_{pC}},$$ или с учетом числовых данных

$$I_{1св}(p) = \left(-\frac{-70{,}42p + 27{,}5\cdot10^{3}}{p^2 + 900p + 4{,}5\cdot10^{5}} - \frac{70{,}42}{p}\right)\cdot p\;{}^{1}\!/_{9}10^{-3} = \frac{-10{,}1p - 3521}{p^2 + 900p + 4{,}5\cdot10^{5}} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Для нахождения оригинала $i_{1св}(t)$ применим теорему разложения:

$i_{1св}(t)=\sum \frac{F_1(p_k)}{F_2(p_k)} e^{p_k t}$, где корни p_1 и p_2 определяются из выражения:

$F_2(p)=p^2+900p+4{,}5\cdot 10^5=0$, $p_{1,2}=-450\pm j497{,}5$.

Заметим, что сумма двух комплексно сопряженных корней p_1 и p_2 в выражении для оригинала $i_1(t)$ равна удвоенной вещественной части одного из корней. Поэтому далее расчет проводим для корня p_1:

$F_1(p_1)=-10{,}1(-450+j497{,}5)-3521=1024-j5024$,

$F_2'(p_1)=2p+900=2(-450+j497{,}5)+900=j995$.

$$\frac{F_1(p)}{F_2'(p)} e^{p_1 t}=\frac{1024-j5024}{j995} e^{(-450+j497{,}5)t}=5{,}14e^{-450t}e^{j(497{,}5t-168{,}7^\circ)}.$$

Вещественная часть этого числа: $5{,}14e^{-450t}\cos(497{,}5t-168{,}7^\circ)$, следовательно,

$i_{1св}(t)=2\cdot 5{,}14e^{-450t}\cos(497{,}5t-168{,}7^\circ)=10{,}28e^{-450t}\sin(497{,}5t-168{,}7^\circ+90^\circ)$

,

$i_{1св}(t)=10{,}28e^{-450t}\sin(497{,}5t-78{,}7^\circ)$, что достаточно хорошо совпадает со значением $i_{1св}(t)$, найденным классическим методом.

3. Построение зависимости $i_1(t)$

$i_1(t)=10{,}6\sin(1000t+55{,}4^\circ)+10{,}36e^{-450t}\sin(497{,}5t-78{,}8^\circ)$, где

$i_{1св}(t)=10{,}36e^{-450t}\sin(497{,}5t-78{,}8^\circ)$, $i_{1пр}(t)=10{,}6\sin(1000t+55{,}4^\circ)$.

Выбираем масштаб по оси абсцисс для свободной составляющей тока:

$m_{0св}=24^\circ/см$. Тогда целому периоду этого тока соответствует отрезок $l_T=$ $360^o/24^o=15$ см. Этот же отрезок соответствует времени $T_{св}=1/f_{св}=2\pi$

$/\omega_{св}$ = 6,28/497,5 = 0,0126 с, то есть масштаб по оси абсцисс для времени $m_{tсв}$ = 0,0126 / 15 = 0,00084 с/см.

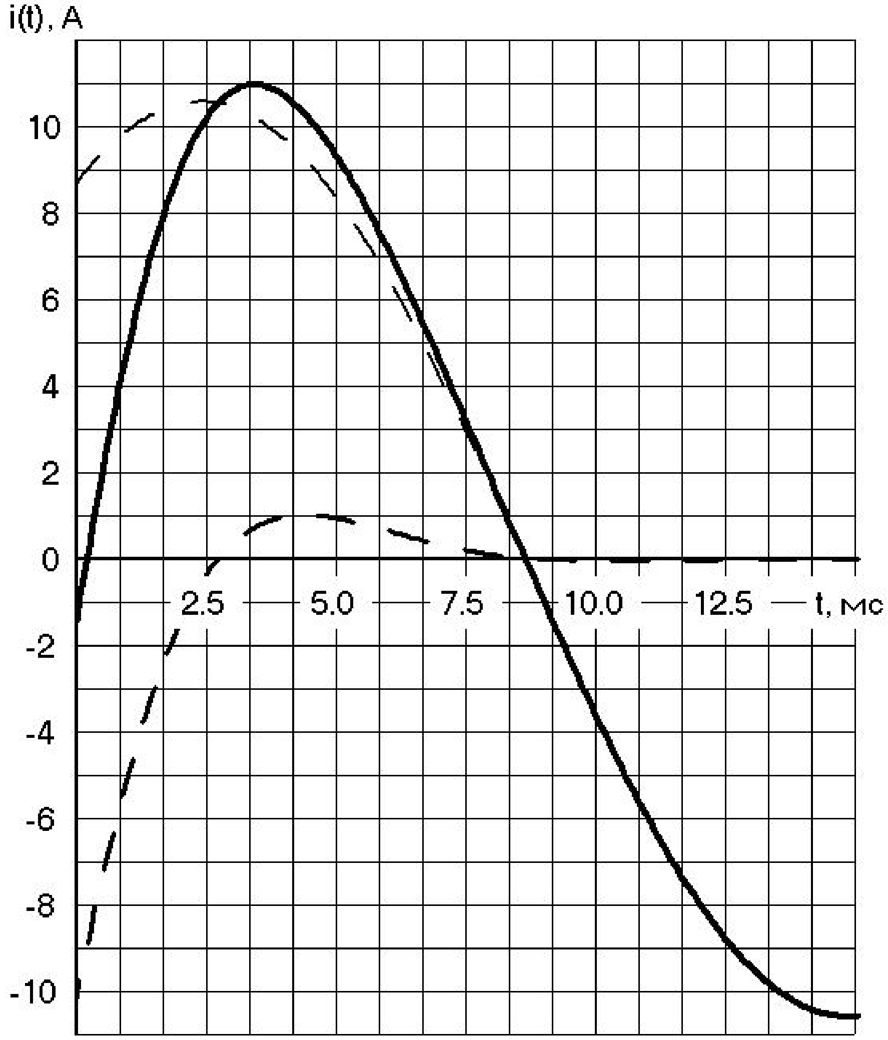


Рис. 6

Таким образом, для точки t = 0 $i_{1св}(0) = 10{,}36e^{o}\sin(-78{,}8^{\circ}) = -10{,}13A$.

Для точки $t = 0{,}00084c$

$i_{1св}(0{,}00084) = 10{,}36e^{-450 \cdot 0{,}00084}\sin(497{,}5 \cdot 0{,}0084 - 78{,}8^{o}) = -5{,}706$.

Для точки $t = 0{,}00168c$ $i_{1св}(0{,}00168) = 10{,}36e^{-0{,}76}\sin(48^{\circ} - 78{,}8^{\circ}) = -2{,}43A$,

и так далее.

По оси ординат выберем масштаб для значения тока $m_i = 1А/см$. Так как $\omega_{пр}$ почти в два раза больше $\omega_{св}$, то масштаб для градусов аргумента принужденного тока $m_{0пр} = 12^\circ/см$.